

Tarek Aissa

**Systemidentifikation und Reglersynthese für
örtlich verteilte Prozesse durch adaptive
Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme am Beispiel des
Raumklimaverhaltens**

Systemidentifikation und Reglersynthese für örtlich verteilte Prozesse durch adaptive Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme am Beispiel des Raumklimaverhaltens

Tarek Aissa



Universitätsverlag Ilmenau

2017

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät für Informatik und Automatisierung der Technischen Universität Ilmenau als Dissertation vorgelegen.

Tag der Einreichung: 1. Januar 2017

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Rauschenbach
(Fraunhofer IOSB, Ilmenau)

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li
(Technische Universität Ilmenau)

3. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Steven Lambeck
(Hochschule Fulda)

Tag der Verteidigung: 17. März 2017

Technische Universität Ilmenau/Universitätsbibliothek

Universitätsverlag Ilmenau

Postfach 10 05 65

98684 Ilmenau

<http://www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag>

readbox unipress

in der readbox publishing GmbH

Am Hawerkamp 31

48155 Münster

<http://unipress.readbox.net>

ISBN 978-3-86360-158-4 (Druckausgabe)

URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2017000082

Titelgrafik: photocase.com

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Hochschule Fulda im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik im Rahmen des BMBF-Projektes „BestBiMa“ sowie des BMW-Projektes "HumiControl". Einen besonderen Dank möchte ich an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Rauschenbach (TU Ilmenau und Fraunhofer AST) richten, für die Betreuung der Arbeit als Hauptreferent. Besonders die Diskussionen an den jährlichen Doktorandenseminaren waren sehr hilfreich und haben einige Ideen in die vorliegende Arbeit einfließen lassen. Auch für die Unterstützung der organisatorischen Abwicklung an dieser Stelle ein herzlicher Dank. Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li (TU Ilmenau) für die Tätigkeit als Korreferent bedanken. Die Expertise im Bereich der Prozessoptimierung im Rahmen der Doktorandenseminare war sehr hilfreich. Ausdrücklich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Steven Lambeck (Hochschule Fulda). Ohne den ständigen fachlichen Austausch, die Unterstützung bei wissenschaftlichen Veröffentlichungen, die Leitung der Arbeitsgruppe „Präventives Klimamanagement“ und der Hilfe bei der Akquirierung von Drittmitteln zur Projektdurchführung wäre das Vorhaben der Promotion für mich in dieser Form nicht möglich gewesen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Cuno möchte ich dafür danken, dass er mich an das wissenschaftliche Arbeiten bereits als Studierender herangeführt hat und stets neue Impulse für die Arbeitsgruppe gegeben hat. Dankbar bin ich ebenfalls Herrn Prof. Dr.-Ing. Bolli Björnsson ohne den ich meine Tätigkeit an der Hochschule nie begonnen hätte. Auch für die stetige und gute Hilfe

bei Fragen oder organisatorischen Aufgaben ein herzlicher Dank. Gleiches gilt für Herrn Dr.-Ing. Christian Arnold, der mich durch seine Motivationen und fachlichen Hinweise maßgeblich zum Erstellen dieser Arbeit bewegt hat. Für die gute Zusammenarbeit in der Arbeitsgruppe möchte ich mich bei den Studierenden und meinen Kollegen bedanken. Vor allem sei gedankt Herrn Andreas Böttcher, Herrn Simon Harasty, Herrn Alessio Cavaterra und Herrn Alexander Köhler.

Für die Unterstützung im Projekt HumiControl, insbesondere bei praktischen Aufgaben, möchte ich mich bei Herrn Oliver Kloss (Heinrich & Kloss GmbH HKE) und Herrn Andreas Kratz (AK Engineering) bedanken, die mit Ihrer Erfahrung und Ihrem Engagement zum Gelingen des Projektes beigetragen haben und eine große Hilfe bei der Durchführung praktischer Experimente waren. Herrn Jörg Rose stellvertretend für die Kulturstiftung des Hauses Hessen ein herzlicher Dank für die gute und hilfreiche Kooperation.

Zu guter Letzt möchte ich von Herzen meiner Familie danken. Meinen Eltern die mich während meines gesamten Studiums in allen Belangen unterstützt haben und mir diesen Weg somit erst ermöglicht haben. Ganz besonders möchte ich meiner Frau Lena danken, die mir seit Jahren zur Seite steht und mir stets den Rücken frei gehalten hat. Auch meiner Tochter Jana für die ständige, wenn auch unbewusste, Motivation und die verhältnismäßig große Rücksichtnahme im jungen Alter.

Tarek Aissa

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellbildung und Regelung nichtlinearer örtlich verteilter Prozesse. Als beispielhafte Anwendung wird die Regelung des Raumklimas im Rahmen der Präventiven Konservierung betrachtet. Die Präventive Konservierung umfasst dabei vorbeugende Maßnahmen zum Schutz von Kulturgütern. Eine wichtige Aufgabe ist hierbei die Stabilisierung des Raumklimas, insbesondere der relativen Luftfeuchtigkeit, in einem stationär akzeptablen Bereich. Zudem sind die kurzfristigen Schwankungen der Klimagrößen auf ein Minimum zu reduzieren. Die Betrachtung des Raumklimaverhaltens als konzentriert-parametrisches System reicht dabei zur Erfüllung der Anforderungen der Präventiven Konservierung nicht aus. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein Ansatz zur örtlich verteilten Betrachtung der Klimagrößen entwickelt, der sowohl die Modellbildung als auch die Regelung umfasst.

Das Verhalten des Raumklimas bildet dabei ein strömungstechnisches Problem der Fluidodynamik. Dieses lässt sich durch ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen beschreiben. Die Lösung solcher Strömungsprobleme erfolgt üblicherweise über numerische Methoden, wie den bekannten CFD-Simulationen. Nachteilig wirkt sich dabei der hohe rechen-technische Aufwand aus, was CFD-Simulationen zur Synthese von Reglern ungeeignet macht.

Durch örtliche Diskretisierung mit Hilfe von Finite-Differenzen Methoden werden die partiellen Differentialgleichungen durch ordinäre Differentialgleichungen approximiert. Anschließend wird das hierdurch entstandene nichtlineare dynamische Gleichungssystem durch Methoden der Takagi-

Sugeno Fuzzy Theorie beschrieben. Hierbei tritt für den Fall örtlich verteilter Systeme die Notwendigkeit der Modellreduktion auf, welche durch die Einführung des sogenannten Hadamard-Produktes gelöst wird.

In dieser Arbeit werden sowohl Methoden zur Reglersynthese als auch Methoden zur datengetriebenen Modellbildung behandelt. Die datengetriebene Modellbildung ist dabei für eine Anwendung des Ansatzes im Rahmen einer Raumklimaregelung notwendig, da ein analytischer Ansatz für diesen Fall nicht praktikabel umsetzbar ist.

Die entwickelten Ansätze werden zunächst theoretisch hergeleitet und an einem eindimensionalen Fallbeispiel verifiziert. Anschließend werden sie auf das Raumklimaverhalten übertragen. Es werden Ergebnisse zur datengetriebenen Modellbildung sowie zur Regelung des Raumklimas anhand von Untersuchungen eines kulturell genutzten Raumes gezeigt und mit gängigen Methoden zur Regelung des Raumklimas verglichen. Die Ergebnisse zeigen dabei, dass die örtlich verteilte Betrachtung deutliche Vorteile bringt.

Abstract

One of the most important and challenging goals of preventive conservation is the protecting of cultural assets from unfavorable climate conditions during storage and exhibition. The longevity of these assets is best ensured by keeping the relative humidity within a suitable range. Modern approaches for modelling and controlling indoor air conditions as lumped parameter systems, an assumption which has led to unsatisfying results for preventive conservation purposes. A long run of indoor climate measurements thus carried out for the current research, yielded the insight that some important physical values, especially relative humidity, are significantly influenced by spatial distribution. This insight led to the focus in this thesis on modelling and control of nonlinear distributed parameter systems.

Since the calculation of spatial distributed systems is imperative for the preservation of cultural assets, it is advantageous to be able to accomplish these calculations quickly. A common approach to such calculations has been to first formulate a general flow problem and then solve it with Computation Fluid Dynamics (CFD). However, because a flow problem is described by a set of nonlinear partial differential equations, only numerical solutions can usually be found, e.g. in CFD. This is desirable in the sense that these numerical solutions are very detailed, but they are not widely used for controller synthesis because the process of arriving at them is very time consuming and complicated.

For this reason, a reduced approach capable of simplifying controller design without neglecting the spatial distribution is developed in this thesis. First of all, a spatial discretization is performed via finite-difference methods. The set of partial differential equations is thus reduced to a set of ordinary differential equations. Subsequently, the derived nonlinear equations are approximated by a Takagi-Sugeno Fuzzy approach. In contrast to lumped parameter systems, there is a need for model reduction in distributed parameter systems, where the number of subsystems would otherwise increase exponentially.

As shown in the following, this model reduction is accomplished through introducing the Hadamard-Product. Methods for controller design are then given, as well as system identification approaches. For the examined case of controlling indoor air conditions, system identification methods proved mandatory, since there is no way of deriving model parameters in real world applications. After these theoretical approaches are elucidated, they are applied to the indoor air conditions and compared to the afore-mentioned currently used methods.

It is thus demonstrated that spatial distributed systems are far more beneficial for preventive conservation and can be simplified while improving accuracy for the purpose of controlling indoor climate conditions and related applications.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	7
Abstract	9
Abkürzungsverzeichnis	15
Symbolverzeichnis	17
1 Einleitung	23
2 Raumklima in Gebäuden mit kultureller Nutzung	29
2.1 Aufgaben der Präventiven Konservierung	31
2.2 Konservatorische Anforderungen an das Raumklima . . .	33
2.3 Stand der Technik in der Gestaltung des Raumklimas . . .	36
2.4 Dezentrale Klimatisierung	38
2.5 Bauphysikalische Grundlagen des Raumklimaverhaltens . .	41
3 Grundlagen örtlich verteilter Systeme	47
3.1 Grundlagen der örtlichen Verteilung des Raumklimas . . .	50
3.1.1 Örtliche Luftverteilung als generelles Strömungsproblem der Fluidodynamik	51
3.1.2 Lösungsansatz über Diskretisierungsmethoden . .	55
3.1.3 Systemtheoretische Analyse von Strömungsproblemen	59
3.2 Modelle zur Raumklimamodellierung	61
3.2.1 Ein-Zonen Modelle	61

3.2.2	Zonale Modelle	63
4	Modellstruktur der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme	69
4.1	Einführung in die Fuzzy-Theorie	73
4.2	Aufbau der TS Fuzzy Systeme	85
4.3	Modellbildung durch TS Fuzzy Systeme	92
4.3.1	Ableitung von TS Fuzzy Systemen aus Modellgleichungen	92
4.3.2	Approximative Modellbildung durch Linearisierung	100
4.4	Approximative Modellbildung durch nichtl. Systemidentifikation	108
4.4.1	Anregungssignal	111
4.4.2	Bestimmung der Systemordnung	113
4.4.3	Struktur- und Parameteridentifikation	115
4.5	Reglersynthese	124
4.5.1	LMI-basierter Reglerentwurf	124
4.5.2	PDC mit Sollwertfolge	134
4.5.3	Fallbeispiel: Regelung von TS Fuzzy Systemen mit Sollwertfolge	139
4.5.4	Integraler PDC zur Sicherung stationärer Genauigkeit	141
4.5.5	Fallbeispiel: Regelung von TS Fuzzy Systemen mit integralem Anteil	144
4.5.6	Regelung von affinen TS Fuzzy Systemen	145
5	Örtlich verteilte Modellierung durch verteilte TS Fuzzy Systeme	147
5.1	Numerische Behandlung örtlich verteilter Systeme	148
5.2	Modellstruktur örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme	159
5.2.1	Analytische Modellbildung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme	163
5.2.2	Approximative Modellierung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme	170

5.2.3	Identifikation örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme .	176
6	Simulative Untersuchungen	181
6.1	Vorstellung der Applikation	182
6.2	Versuchsumgebung	188
6.3	Systemidentifikation	191
6.3.1	Bestimmung der Modellstruktur	192
6.3.2	Parameteridentifikation	201
6.4	Reglersynthese und Ergebnisse	216
6.4.1	Quadratische Systeme	217
6.4.2	Nichtquadratische Systeme	220
7	Zusammenfassung und Ausblick	225
	Literaturverzeichnis	244

Abkürzungsverzeichnis

AIC	Akaike Informationskriterium
API	Application programming interface
APRBS	Amplitudenmoduliertes Pseudo Random Binary Signal
ASHRAE	American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers
BIC	Bayessches Informationskriterium
BMI	Bilinear Matrix Inequality
CAD	Computer-Aided Design
CFD	Computational Fluid Dynamics
COG	Center of Gravity
DTS	Distributed Takagi-Sugeno
EZM	Ein-Zonen Modelle
FDM	Finite-Differenzen Methode
FEM	Finite-Elemente Methode
FVM	Finite-Volumen Methode
GEVP	General Eigenvalue Problem

ICOM	International Council of Museums
LMI	Linear Matrix Inequality
LOLIMOT	Local Linear Model Tree
LQR	Linear Quadratic Regulator
nPDE	nichtlineare partielle Differentialgleichung
PDC	Parallel Distributed Compensation
PDE	partielle Differentialgleichung
PRBS	Pseudo Random Binary Signal
RMSE	Root Mean Squared Error
SNL	Sektornichtlinearitäten
SQL	Structured Query Language
TCP/IP	Transmission Control Protocol / Internet Protocol
TS	Takagi-Sugeno
VP-PDC	verteilt parametrische Parallel Distributed Compensation
XML	Extensible Markup Language

Symbolverzeichnis

\aleph	beliebige nichtlineare Funktion (örtlich diskretisiert)
Δt	Schrittweite der zeitlichen Diskretisierung
Δx	Schrittweite der örtlichen Diskretisierung
δ	Abstand von Zugehörigkeitsfunktionszentren
Δ_G	äquidistante örtliche Diskretisierungsschrittweite in alle Dimensionen
$\Delta_x \vartheta$	maximale Differenz aller Messungen der Temperatur im Raum
Δ_{ij}	Breite einer zweidimensionalen Teilung (LOLIMOT)
η	Erfülltheitsgrad einer Fuzzy Regel
Γ	Diffusionskoeffizient
$\hat{\varphi}_i$	Simulierter Modellausgang
κ	Abklingrate
Λ	Sektorfunktion
λ_1, λ_2	Koeffizientenfunktionen
$\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}$	Grenzen der Sektorfunktion
$\mu(\alpha)$	Zugehörigkeitsgrad von α

Ω	Betrachteter örtlicher Arbeitsbereich eines örtlich verteilten Systems
Ω_{Grid}	Gitter eines diskretisierten örtlich verteilten Systems
$\bar{\vartheta}$	gemittelte Raumtemperatur
$\partial\Omega$	Rand eines örtlich verteilten Systems
ϕ	Bezugsvariable eines Strömungsproblems, generelle Strömungsvariable
ϕ_i	generelle Strömungsvariable am Knotenpunkt i
Ψ	Fuzzy Basis Funktion
ρ	Dichte
Σ	Gewichtungsmatrix
σ	Standardabweichung
Θ	Parametermatrix
θ	Temperatur
\underline{S}	Parameter der Zugehörigkeitsfunktion
\underline{v}	Geschwindigkeitsfeld
\underline{v}	Geschwindigkeitsfeld
\underline{y}	Auswahl von Lösungen an speziellen Gitterpunkten
Υ	gewichtete Messmatrix
$\varphi, \varphi_i, \varphi_{\text{rel}}$	relative Luftfeuchte (innen)

$\varphi^{\Delta x+r}$	relative Luftfeuchte der Nachbarpunkte mit diskretem Einzugsradius r
$\varphi_{\text{abs,sat,a}}$	saturierte absolute Luftfeuchte (aussen)
$\varphi_{\text{abs,sat}}$	saturierte absolute Luftfeuchte (innen)
φ_{abs}	absolute Luftfeuchte
φ_{iq}	Interquartil der relativen Luftfeuchte
φ_a	relative Luftfeuchte (aussen)
ϱ	Lösungsvektor des örtlich diskretisierten örtlich verteilten Systems
$\vartheta^{\Delta x+r}$	Temperatur der Nachbarpunkte mit diskretem Einzugsradius r
\tilde{C}	Kern einer Zugehörigkeitsfunktion
\tilde{G}	Fuzzifizierter Arbeitsraum
\widetilde{M}	Fuzzy Menge
\tilde{S}	Support einer Zugehörigkeitsfunktion
ζ	Zentrum einer Zugehörigkeitsfunktion
$A(x)$	nichtlineare Systemmatrix
A_F	Fläche
A_i, B_i, C_i, D_i	System-, Eingangs-, Ausgangs-, Durchgangsmatrix
a_i, c_i	affiner Anteil der Zustands-, Ausgangsgleichung
D_ϕ	Diffusiver Fluss

d_x, d_y, d_z	Indizierung der Gitterpunkte in x-, y-, z-Richtung
dx, dy, dz	Ausdehnung in x -, y -, z -Richtung
E	Schätzfehler
e_{control}	Gütemaß des Regelfehlers
e_{cum}	Kumuliertes Fehlersignal
e_{lokal}	Lokales Fehlermaß
E_{PDE}	Approximationsfehler der Lösung des örtlich verteilten Systems
f_{NL}	beliebige nichtlineare Funktion
G_i	produzierter Wasserdampfstrom
$G_{a \rightarrow i}$	Wasserdampfstrom von aussen nach innen
$G_{i \rightarrow a}$	Wasserdampfstrom von innen nach aussen
$i(x, t)$	orts- und zeitabhängiger Strom
J_{Diff}	Teilchenstromdichte
$J_{\text{in}}, J_{\text{out}}$	Stromquelle/-senke
J_{Kon}	Konvektive Strömung
J_x, J_y, J_z	Fluss in x -, y -, z -Richtung
k	diskreter Zeitindex
K_ϕ	Konvektiver Fluss
k_σ	Proportionalitätsfaktor LOLIMOT zur Berechnung der Standardabweichung

K_i	i-ter Zustandsregler (PDC)
M	klassische Menge
m	Masse
n_{Grid}	Anzahl Gitterpunkte in örtlich diskretisiertem örtlich verteilten System
n_{LWR}	Luftwechselrate
N_ζ	Anzahl Stützstellen bei approximativer Modellierung
N_d	Anzahl Datenpunkte
N_R	Anzahl Fuzzy Regeln
N_x, N_{x_i}	Anzahl Intervalle in Richtung der Dimension x_i
N_x, N_y, N_z	Anzahl Gitterpunkte in x-, y-, z-Richtung
p	statischer Druck
p_w	Wasserdampfpartialdruck
p_{sat}	saturierter Wasserdampfpartialdruck
q^n	Lipschitz Index
Q_ϕ	Quellterm
q_{ij}	Lipschitz-Quotient
R_ϑ	Gaskonstante
R_i	i-te Fuzzy Regel
R_s	spezifische Gaskonstante

t	Zeit
T_a	Aussentemperatur
T_H	Haltezeit
T_i	Innentemperatur
u	Eingangsgröße
$U(x, t), u(x, t)$	orts- und zeitabhängige Spannung
u_c	Steuerbare Systemeingänge
u_{uc}	Nicht-Steuerbare Systemeingänge
V	Lyapunovfunktion
V_F	Vorfilter
V_R	Raumvolumen
v_x, v_y, v_z	Geschwindigkeit in x-, y-, z-Richtung
w	Sollwert
x	Zustandsvektor
x_i	i-ter Zustand
x_w, u_w	Zielruhelage
y	Ausgangsvektor
z	Scheduling Variablen

1 Einleitung

Die Präventive Konservierung befasst sich mit der Bestandserhaltung von schützenswertem Kulturgut durch vorbeugende Maßnahmen. Ein wichtiger Aspekt ist dabei eine geeignete Gestaltung des Raumklimas derart, dass der Alterungsprozess der Objekte möglichst verlangsamt und somit die Lebensdauer verlängert wird. Auf diese Weise lassen sich die Kosten, die durch Restauration anfallen, deutlich reduzieren. Dabei besteht die Aufgabe zum einen darin, dass Raumklima in einen stationär akzeptablen Bereich zu überführen und zum anderen kurzfristige Schwankungen weitestgehend zu verhindern um den Stofftransport durch die Objekte zu reduzieren. Dabei werden aktive und passive Maßnahmen zur Beeinflussung des Raumklimas unterschieden. Maßnahmen der Präventiven Konservierung in Bezug auf die Raumklimagegestaltung können beispielsweise aus bauphysikalischer Sicht erfolgen, was zu den passiven Maßnahmen zu zählen ist. Dieser Weg wird häufig bei Neubauten beschritten, indem Bausubstanzen an die örtlichen Gegebenheiten so angepasst werden, dass sich das Raumklima möglichst selbstständig und in gewünschter Art und Weise reguliert. Bei vorhandenen Bauwerken, insbesondere bei historischen Gebäuden, gestalten sich solche bauphysikalischen Maßnahmen meist deutlich schwieriger und sind dementsprechend mit enormen Kostenaufwand verbunden. Zieht man Aspekte des Denkmalschutzes mit in Betracht, sind umfangreiche Umbaumaßnahmen nahezu ausgeschlossen. In diesem Fall muss auf aktive Klimatisierung der Räumlichkeiten zurückgegriffen werden, das heißt, es müssen zusätzliche technische Einrichtungen zur Beeinflussung der Klimagrößen geschaffen werden. Sofern keine raumluftechnischen Anlagen installiert sind oder instal-

liert werden können, was häufig der Fall ist, können mobile Endgeräte (z.B. mobile Be- oder Entfeuchter) eingesetzt werden um das Raumklima aktiv zu beeinflussen. Von besonderem Interesse im Sinne der Präventiven Konservierung sind hierbei die Größen Temperatur und relative Luftfeuchtigkeit. Befinden sich diese Größen in ungeeigneten Regionen führen sie den Kulturgütern langfristig erheblichen Schaden zu, wie die Beispiele aus Abbildung 1.1 exemplarisch zeigen.

Wird das Raumklima zunächst als autonomes System betrachtet, so wird es maßgeblich vom Außenklima sowie der technischen Nutzung (zum Beispiel durch Museumsbetrieb) beeinflusst. Der Zusammenhang dieser Größen ist dabei deutlich komplexer als er meist wahrgenommen und in der Literatur behandelt wird [1]. Insbesondere bezüglich regelungstechnischer Ansätze zur Gestaltung des Raumklimas werden vereinfachende Annahmen getroffen, um die Reglersynthese möglichst einfach und nutzerfreundlich zu halten. In klassischen mobilen Klimatisierungsgeräten finden sich beispielsweise nahezu ausschließlich schaltende Regler, die über Hysteregrenzen parametrisiert werden [2]. Die Folge sind deutliche unerwünschte Schwankungen im Kurzfristbereich zwischen den Hysteresegrenzen (siehe Abbildung 1.2).

Des Weiteren basieren die Regelungen in verfügbaren mobilen Geräten meist auf der Klimamessung an einer Referenzstelle im Raum, was eine erhebliche Vereinfachung des Systems „Raumklima“ darstellt. Insbesondere in großen Gebäuden oder Räumen unterliegt das Raumklima einer deutlichen örtlichen Verteilung, sodass die konzentrierte Betrachtung an einer Referenzstelle zu falschen und suboptimalen Ergebnissen aus regelungstechnischer Sicht führen kann. In der näheren Vergangenheit wurde dieses Problem im Themenfeld der Modellierung ausführlicher betrachtet. Sogenannte Multi-Zonen Modelle wurden entwickelt, die die örtliche Verteilung des Raumklimas berücksichtigen [6, 7, 8]. Zur Anwendung der örtlich verteilten Regelungstheorie sind nach heutiger Kenntnis auf dem Gebiet der Präventiven Konservierung keine Arbeiten bekannt.



Abbildung 1.1: Klimabedingte Schadensfälle durch zu schnelle Temperaturänderungen (oben links) [3], durch Schimmelbefall und Insektenfrass aufgrund zu hoher Feuchte (oben rechts) [4] und Schwind- und Dehnprozesse durch Klimaschwankungen (unten) [5]

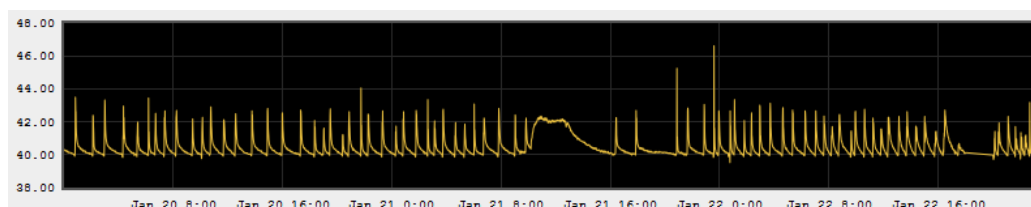


Abbildung 1.2: Exemplarische Messung der relativen Luftfeuchte eines klimageregelten Raumes mit Hilfe aktuell verfügbarer mobiler Be- und Entfeuchtungsgeräte.

Ein weiterer Ansatz, der häufig zu Planungszwecken neuer Gebäude angewendet wird, sind Methoden der Computational Fluid Dynamics (CFD). Sie basieren auf den physikalischen Grundgesetzen der Strömungslehre und bieten die momentan detaillierteste Lösungsmöglichkeit. Allerdings sind solche Simulationen enorm rechenintensiv und verlangen einen hohen ingenieurtechnischen Aufwand, sodass sie zur Reglersynthese ungeeignet erscheinen. An diesem Punkt setzt diese Arbeit an. Basierend auf den Grundgleichungen der Fluidodynamik wird ein reduzierter Modellansatz vorgestellt, der die

wichtigsten Eigenschaften des Raumklimas repräsentiert. Diese sind in der vorliegenden Arbeit wie folgt definiert:

- Das Raumklima wird als örtlich verteiltes System betrachtet
- Um Modelle in der praktischen Anwendung generieren zu können, müssen die Modellparameter aus Messdaten im Rahmen der datengetriebenen Modellbildung gewonnen werden
- Die Kopplung der Klimagrößen, sowie die Strömungseinflüsse sind nichtlinear

In dieser Arbeit wird ein Ansatz aus numerischen Lösungsansätzen für partielle Differentialgleichungssysteme und der nichtlinearen Modellbildung und Regelung mit Hilfe der Fuzzy-Theorie entwickelt. Dabei werden die partiellen Differentialgleichungssysteme durch örtliche Diskretisierungsverfahren approximiert, was dem Stand der Technik in der numerischen Lösung örtlich verteilter Systeme entspricht. Die dadurch entstehenden nichtlinearen aber ordinären Gleichungssysteme werden durch die Methode der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme behandelt. Der große Vorteil dieser Systemdarstellung ist, dass sich durch eine gewichtete Kombination linearer Systeme nichtlineares Verhalten beliebig genau approximieren lässt und dennoch alle Vorteile der linearen Systemdarstellungen erhalten bleiben. Somit kann die lineare Theorie sowohl bei der Reglersynthese als auch bei der datengetriebenen Modellbildung (im Folgenden auch Systemidentifikation genannt) angewandt werden. Dies vereinfacht Modellbildung und Reglersynthese erheblich, da für die Klasse der linearen Systeme im Gegensatz zu den nichtlinearen Systemen eine geschlossene Theorie existiert [9].

Ziel dieser Arbeit ist es, einen ganzheitlichen Ansatz zur Raumklimaregelung zu liefern, der

- die örtliche Verteilung der Klimagrößen berücksichtigt
- Klimaschwankungen durch eine kontinuierliche Regelung vermindert

- eine Performanceverbesserung durch datengetriebene Modellbildung ermöglicht

Hierzu werden in Kapitel 2 zunächst die Grundlagen und Anforderungen der Präventiven Konservierung sowie die bauphysikalischen Grundlagen dargelegt. Dabei wird der Stand der Technik in der Präventiven Konservierung kurz erläutert und die Notwendigkeit verbesserter Regelungsstrategien motiviert.

Die notwendige Theorie der örtlich verteilten oder auch verteilt-parametrischen Systeme wird in Kapitel 3 eingeführt und für die Anwendung auf das Raumklimaverhalten spezifiziert. Die verwendeten Lösungsansätze werden erläutert, sowie weitere in der Literatur zu findende Ansätze zum Vergleich genannt. Kapitel 4 gibt einen Einstieg in die Fuzzy-Theorie insbesondere in die Theorie der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme. Hier werden neben der Systemdarstellung ebenfalls die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Reglersynthese und zur Systemidentifikation vorgestellt. Die Erweiterung der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme auf örtlich verteilte Systeme ist Gegenstand des fünften Kapitels. Zunächst wird der entwickelte Ansatz formell eingeführt und anschließend anhand eines Fallbeispiels an einem eindimensionalen örtlich verteilten Problem angewandt. Dabei werden sowohl die Reglersynthese als auch die Systemidentifikation behandelt.

Es folgt die Anwendung des vorgestellten Ansatzes für die Raumklimaregelung. Neben der Applikationsvorstellung und der Beschreibung der Versuchsumgebung wird ein Raumklimamodell eines historischen Raumes, des Landgrafenzimmers im Schloss Fasanerie der Kulturstiftung des Landes Hessen, generiert. Basierend auf dem gewonnenen Modell wird die Reglersynthese durchgeführt und die Ergebnisse der Regelung werden vergleichend dargestellt und analysiert. Abschließend gibt Kapitel 7 eine Zusammenfassung und einen kurzen Ausblick auf folgende Arbeiten.

2 Raumklima in Gebäuden mit kultureller Nutzung

Der Begriff „Klima“ ist heutzutage ein häufig verwendetes Synonym, welches im Allgemeinen die Wahrnehmung umgebender Bedingungen beschreibt. Er wird aus sozialer Sicht, politischer Sicht oder aus technischer Sicht verwendet, beschreibt aber immer die Wahrnehmung oder den Zustand einer Atmosphäre (oder Umgebung). Eine erste Spezialisierung des Begriffs aus geophysikalischer Sicht liefert Alexander von Humboldt, der den Begriff Klima beschreibt als [10]

„sämtliche Veränderungen der Atmosphäre, von denen unsere Organe merklich affiziert werden; solche sind: die Temperatur, die Feuchtigkeit...“.

Mit dieser Definition bekommt der Begriff „Klima“ eine erste physikalisch wirkende Bedeutung, die für den Fokus dieser Arbeit zutreffend ist. Ebenfalls in [10] findet sich eine speziellere Definition, die „Klima“ als

„die Summe aller Umweltfaktoren, die unmittelbar oder mittelbar Einfluss nehmen auf die Gesundheit und das Befinden von Menschen und Tieren, auf die Entwicklung von Pflanzen sowie auf den Zustand von Lagergütern, Produktionsverfahren, Maschinen, Apparaten und Bauwerken“.

Hat Alexander von Humboldt das „Klima“ noch ausschließlich auf den Menschen bezogen, wird in der zweiten Definition der Begriff auf die komplette physische Welt erweitert, was als Definition des Begriffs für die vorliegende

Arbeit ausreichend erscheint. Dennoch wird der Begriff an dieser Stelle weiter unterteilt in die Begriffe *Aussenklima* und *Raumklima*. Der Begriff *Aussenklima* bezeichnet sämtliche klimatischen Bedingungen die sich ausserhalb einer Betrachtungseinheit, beispielsweise eines musealen Raumes, befinden. Es muss sich dabei nicht zwangsläufig um Örtlichkeiten im Freien handeln, auch angrenzende Räume bilden aussenklimate Bedingungen. Das „Klima“ innerhalb einer Betrachtungseinheit bildet demnach das *Raumklima*.

Ein weiterer wichtiger Begriff in Rahmen dieser Arbeit ist die „Bauklimatik“. Die „Bauklimatik“ stellt den Zusammenhang zwischen den vorher definierten Größen des Außenklimas und des Raumklimas her [11, 12]. Es ist somit Aufgabe der Bauklimatik, das Raumklima so zu gestalten, dass es gegebene klimatische Ziele erfüllt, die darin bestehen können [10]

- Lebewesen und Objekte vor Auswirkungen des Außenklimas zu schützen
- nutzerbedingte Komfortansprüche einzuhalten
- das Gebäude vor Klimaschäden zu schützen

Bereits bei der Planung von Gebäuden muss daher der gebäudetechnische Klimaschutz mit in Betracht gezogen werden. Man spricht bei solchen Maßnahmen von „passiven“ Methoden der Bauklimatik. Die Methoden die im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellt werden zählen allerdings zu den „aktiven“ Methoden, bei denen zusätzliche Lasten durch technische Maßnahmen aus den Gebäuden transportiert oder dem Gebäude zugeführt werden. Bekannte aktive Methoden der Bauklimatik sind daher sogenannte *HVAC (Heating, Ventilation, Air Conditioning)-Anlagen*, die durch Zuführung von Energie (bspw. Wärmeenergie) das Raumklima aktiv verändern.

Die Gestaltung des Raumklimas ist somit eine interdisziplinäre Aufgabe, aus unterschiedlichen ingeniuertechnischen, architektonischen, bauphysikalischen und restauratorischen Aufgaben, und muss daher unterschiedlich-

ten Ansprüchen genügen. Solche Ansprüche können aus architektonischer Sicht, aus Besucherkomfortaspekten wie bei einem musealen Betrieb, aus Energieeffizienzgründen oder beispielsweise auch aus kulturellen Aspekten entstehen [13]. Sie alle müssen gleichermaßen berücksichtigt werden, was eine Definition des optimalen Raumklimas erschwert. Von besonderem Interesse im Rahmen dieser Arbeit sind die Anforderungen an das Raumklima, die durch kulturelle Aspekte motiviert sind, das heißt eine Gestaltung des Raumklimas zum Schutz gelagerter Kulturgüter [13], [14]. Dennoch reicht eine exklusive Betrachtung dieser Ansprüche aus den oben genannten Gründen nicht aus, sodass das Ziel eines kulturgutschützenden Raumklimas nur unter Nebenbedingungen erfüllt werden kann. Eine wichtige Disziplin stellt hier die „Präventive Konservierung“ dar.

2.1 Aufgaben der Präventiven Konservierung

Wie der Begriff „*Präventive Konservierung*“ bereits andeutet, handelt es sich hierbei um vorbeugende Maßnahmen zum Schutz des Kulturgutes. Der eigentliche Schutz von Kulturgütern beziehungsweise die wissenschaftliche Denkmalpflege beginnt Anfang des 19. Jahrhunderts [15]. Zu dieser Zeit gab es zwei unterschiedliche Auffassungen was der optimale Weg der Denkmalpflege sei. Eugène Viollet-le-Duc war ein Verfechter der Restaurierung. Er verstand darunter, die Erschaffung eines historisch idealen Zustandes, notfalls auch durch Ergänzungen (Rekonstruktionen) [16]. Eine gegenteilige Meinung vertrat John Ruskin. Er war der Meinung, dass dieses Vorgehen den Zustand des Objektes verfälsche und den Denkmalwert zerstöre. Für Ruskin war die Konservierung, also der Erhalt des aktuellen Zustandes, der richtige Weg. Ihm folgte Anfang des 20. Jahrhunderts Georg Dehio, der einen noch heute aktuellen Leitsatz prägte. Dehios Ansicht nach gilt die Maxime „*Konservieren statt Restaurieren*“. [15].

Trotz des steigenden Interesses an vorbeugenden Maßnahmen gegen Ende des 20. Jahrhunderts konnten sich Restauratoren lange nicht auf eine gemein-

same Definition des Begriffes *"Präventive Konservierung"* einigen [17]. In den Berufsdefinitionen für Restauratoren des „International Council of Museums (ICOM)“ aus den Jahren 1984 und 1986 finden sich keine Hinweise auf die vorbeugende oder Präventive Konservierung. Dennoch sind sich viele Restauratoren seit langem der Thematik und Notwendigkeit bewusst [17], [18]. Dieses Bewusstsein führte folglich in der näheren Vergangenheit dazu, dass eine neue Fachdisziplin, die Präventive Konservierung, entstanden ist, die konsequenterweise im Jahr 1993 auch in den Richtlinien der „*European Confederation of Conservator-restorers*“ neben den Disziplinen der *praktischen Konservierung*, der *Untersuchung* und der *Restauration* festgehalten wurde. Demnach besteht die Präventive Konservierung [17]

„aus einem indirekten Tätigwerden, mit dem der Verfall aufgehalten und Schäden verhindert werden sollen, indem optimale Voraussetzungen für den Erhalt des Kulturgutes geschaffen werden, soweit sich dies mit dessen öffentlicher Nutzung in Einklang bringen lässt. Die vorbeugende Konservierung umfasst den korrekten Umgang mit dem Kulturgut sowie Nutzung, Transport, Lagerung und Ausstellung unter korrekten Bedingungen“.

Heute gilt das Grundsatzpapier von Vantaa als zentrales Dokument im Hinblick auf die Präventive Konservierung [19]. Eine klare Definition ist allerdings auch hierin nicht gegeben. Allerdings wird in dem Papier klar gefordert, dass weitere Berufsgruppen ausserhalb des Restauratorenberufs eingebunden werden müssen.

Eine treffende Definition liefert der Kunsthistoriker Burmester in [17] wie folgt:

„Die Präventive Konservierung bündelt eine Vielzahl indirekter, auf den dauerhaften Erhalt von Kulturgut ausgelegte Maßnahmen und bemüht sich dabei um eine ganzheitliche, interdisziplinär getragene Sicht der Problematik des Erhaltes von

Kulturgut. Durch die Schaffung von geeigneten Raumhüllen, verbesserten Klima-, Licht- und Raumlufthbedingungen oder der Optimierung von Transportprozessen u. a. trägt sie damit nachhaltig zum Erhalt ganzer Sammlungsbestände oder –komplexe bei. Im Vordergrund steht eine sorgsame Analyse, Bewertung und Minimierung aller Risiken. Die Präventive Konservierung ist ein wirksames und auf lange Sicht wirtschaftliches Mittel, intervenierende direkte Maßnahmen an einzelnen Objekten auf ein Minimum zu reduzieren. Die Präventive Konservierung bindet alle im Umgang mit dem Kulturgut Betraute verantwortlich ein“.

Fasst man die aufgeführten Aussagen zusammen, kann man festhalten, dass die Präventive Konservierung sämtliche Maßnahmen zur Verzögerung der Alterung beziehungsweise Zerstörung von Kulturgütern umfasst. Eine genannte Teildisziplin ist dabei die Verbesserung des Raumklimas und der Raumlufthbedingungen, welche den Fokus der Arbeit bilden sollen. Aus diesem Grund werden im Folgenden die konservatorischen Anforderungen an das Raumklima sowie die Grundlagen der Raumklimatik beschrieben.

2.2 Konservatorische Anforderungen an das Raumklima

Die Frage nach den konservatorischen Anforderungen an das Raumklima ist gleichzeitig die Frage nach optimalen Werten für betreffende Raumlufthgrößen, wie Temperatur, relative Luftfeuchte, Schadstoffkonzentration oder Strahlungsintensität [20]. Im Zusammenhang mit der Präventiven Konservierung rückt die Betrachtung von relativer Luftfeuchte und Temperatur allerdings zunehmend in den Fokus. Beim Studium der Literatur fällt hier schnell auf, dass eine einheitliche Darstellung der Optimalität dieser Größen nicht existiert [20], [21].

Erste systematische Messungen fanden zur Zeit des zweiten Weltkrieges statt, als Bestände zur Sicherheit vor Angriffen in Bergwerksstollen ausgelagert wurden [20]. Schnell fiel auf, dass die relative Luftfeuchte, die in etwa bei 100% lag, für eine Deponierung deutlich zu hoch war. Durch eine Erhöhung der Umgebungstemperatur von 8°C auf ca. 17°C konnte die relative Luftfeuchtigkeit auf knapp 58% abgesenkt werden. Der Chemiker Rawlins stellte dabei fest, dass sich die geringen Schwankungen und die beschriebenen Größenordnungen sehr positiv auf die gelagerten Gemälde auswirkten [20]. Eine zweite Erkenntnis aus dieser Zeit folgte nach Kriegsende, als die Gemälde wieder an Ihren Ursprungsort nach London transportiert wurden. Im kalten Winter 1946/1947 rissen einigen Exponate der Länge nach von oben nach unten. Solche Erfahrungen führten zur Einführung von sogenannten „aktiven Konservierungsmaschinen“ [20]. Seither wird die Frage diskutiert, welche Werte für das Raumklima als ideal anzusehen sind. Unter Restauratoren und Museumbetreibern werden die sogenannten „ICOM-Werte“ häufig als geltender Standard angesehen [20]. Sie wurden von J. Plenderleith und P. Philippot im Jahre 1960 publiziert und leiten sich im wesentlichen aus den Erfahrungen Rawlins ab [22]. Diese Richtwerte sind für den praktischen Museums- oder Archivbetrieb sinnvoll, da man sich hier häufig auf einen *Idealwert* festlegen muss. Aus konservatorischer Sicht ist die Fragestellung allerdings stark materialabhängig und kann unter dem Aspekt, dass sich meist mehrere zu schützende Objekte unterschiedlicher Materialien in engerer Umgebung befinden nur als Kompromisslösung verstanden werden. Daher entstehen vermehrt akzeptable Klimabereiche, in denen Temperatur und relative Luftfeuchte intervallartig formuliert werden. Eine solche intervallbasierte Einteilung kann beispielsweise durch Vorgabe von *idealen* (dunkelgrau), *akzeptablen* (hellgrau) und *inakzeptablen* (weiß) Bereichen erfolgen, wie sie exemplarisch in Abbildung 2.1 (vgl. auch [20], [23]) dargestellt ist.

Zu den intervallartig formulierten stationären Anforderungen des Raumklimas kommen die Stabilisierung des selbigen, das heißt die Beseitigung

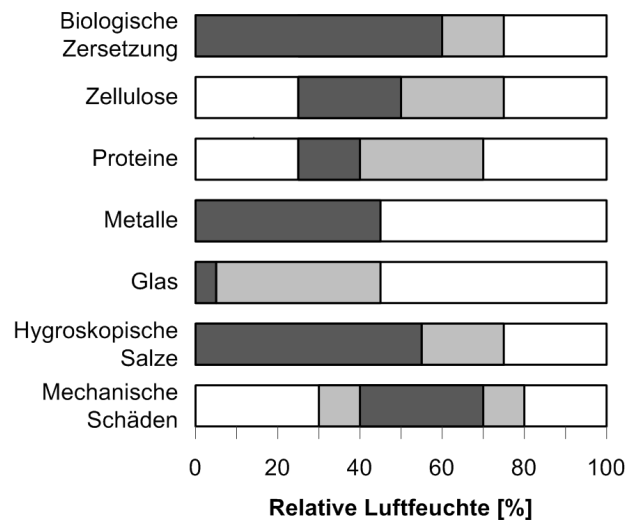


Abbildung 2.1: Intervallartige Anforderungen an die relative Luftfeuchte in Anlehnung an [24].

kurzfristiger Schwankungen, hinzu. Diese Anforderung stellt eine zentrale Aufgabe der Präventiven Konservierung dar und ist bei ungenügender Beachtung ein Hauptgrund für beschleunigte Zerfallsprozesse.

Die Materialfeuchte steht mit der Umgebungsfeuchte langfristig gesehen im Gleichgewicht. Treten nun schnelle Änderungen der relativen Luftfeuchte auf, kommt es zum Feuchtetransport aus den Objekten beziehungsweise in die Objekte, je nach Richtung der Feuchtedifferenz. Dieser Feuchtetransportprozess bewirkt Quell- und Schwindprozesse an den Objekten und führt somit zum Zerfall. Aktuelle Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Denkmalpflege beschäftigen sich damit, maximale zulässige Feuchtegradienten zu bestimmen, sowie den Einfluss der Frequenz von Feuchteschwankungen zu ermitteln [20]. Es kann also auch für die Schwankungen der Luftfeuchte bisher kein oberer zulässiger Grenzwert für Amplitude und Frequenz angegeben werden, allerdings gilt, dass die Feuchteschwankungen minimiert und im besten Fall komplett vermieden werden sollten. Diese Tatsache findet man folgerichtig in aktuellen Richtlinien wie der ISO 11799:2003 [23] oder dem Application Handbook der American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers (ASHRAE) [25]. Hier werden neben den stationär erwünschten Werten für Temperatur und relative Luftfeuchte

stets Obergrenzen für die kurzfristige Änderung der Größen mit angegeben, immer mit dem Hinweis, dass die Änderungen möglichst gering und die Häufigkeit möglichst klein gehalten werden sollten.

2.3 Stand der Technik in der Gestaltung des Raumklimas

In Abschnitt 2.2 wurden die stationären und dynamischen Anforderungen an die Größen Temperatur und relative Luftfeuchte beschrieben. Speziell die Minimierung der kurzfristigen Schwankungen stellt sich dabei als nicht triviale Aufgabe dar, die zum jetzigen Zeitpunkt für Anwendungen in historischen Gebäuden nur ungenügend gelöst ist (vgl. Abbildung 1.2). Dies zeigt eine Aussage Burmesters in [20] in der die Einhaltung der gewünschten Grenzen als derzeit technisch nicht realisierbar eingeschätzt wird. Gleichwohl werden Maßnahmen ergriffen um die stationären Bereiche unter möglichst geringen Schwankungen einzuhalten, die im Folgenden kurz dargestellt werden.

Wie bereits erwähnt wurde, unterscheidet man bei der Gestaltung des Raumklimas zwischen *aktiven* und *passiven* Methoden. Die passiven Methoden umfassen Maßnahmen die bereits in der Planung von Neubauten oder bei der Restaurierung von Gebäuden bedacht werden sollten, wie beispielsweise die Wahl des Materials der Gebäudehülle. Die passiven Methoden können nach einer Definition von Karl Petzold [10] als „*Klimagerechtes Bauen*“ beschrieben werden. Hier heißt es, die Konstruktion von Gebäuden so an das Außenklima anzupassen, dass ein der Nutzung angepasstes Raumklima mit minimalem Aufwand erreicht werden kann.

Bei den passiven Methoden spricht man auch von freier Klimatisierung, bei der lediglich die Eigenschaften des Gebäudes maßgebend für das Raumklima sind. Die Klimatisierung erfolgt autogen. Wenn sehr enge Raumklimaanforderungen bestehen, reicht die freie oder autogene Klimatisierung allerdings nicht aus, um diese zu erfüllen und das Raumklima muss aktiv gestaltet werden. Hierbei handelt es sich um die erzwungene oder energogene Klimatisierung [10].

Bei der erzwungenen Klimatisierung unterscheidet man weiter in Lüftung und Klimatisierung, wobei es auch hier noch weitere Unterteilungen gibt. Bei der freien Lüftung werden Druck- beziehungsweise Temperaturunterschiede zwischen Innen- und Außenklima ausgenutzt, die aufgrund von Ausgleichsvorgängen eine Luftströmung durch das Gebäude verursachen. Diese Luftströmungen führen zwangsläufig zum Luftwechsel und daher zu einer Anpassung der Lufteigenschaften. Wird die zur Luftströmung notwendige Druckdifferenz maschinell erzeugt, im einfachsten Fall durch einen Ventilator, spricht man von erzwungener Lüftung. Im Falle der Klimatisierung unterscheidet man weiter zwischen zentraler und dezentraler Klimatisierung. Bei der zentralen Klimatisierung wird die Luft in einer raumluftechnischen Anlage bearbeitet und über Luftkanäle im Gebäude verteilt. Wenn in einem Gebäude diverse unterschiedliche Anforderungen herrschen, beispielsweise unterschiedliche Anforderung für einzelne Räume, bieten solche Anlagen häufig nicht die gewünschte Flexibilität [20]. Des Weiteren können solche raumluftechnischen Anlagen, wie sie in Neubauten nunmehr üblich sind, in bereits bestehenden historischen Gebäuden häufig nicht installiert werden. Gründe hierfür sind in [26] und [27] zu finden. Hier werden beispielsweise die hohen Investitionskosten oder die häufig massiven notwendigen Eingriffe in die historische Bausubstanz als Hindernisse zur Installation solcher Anlagen angegeben.

Bei der dezentralen Klimatisierung werden mobile Geräte eingesetzt, wie sie exemplarisch in Abbildung 2.2 zu sehen sind. Hierbei sind die Geräte nach heutigem Stand mit eigener Sensorik und Steuerungssoftware ausgestattet, sodass das Klima autark und dezentral geregelt werden kann. Eine Übersicht der möglichen Klimatisierungsmaßnahmen ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Zahlreiche Forschungsarbeiten haben sich bereits dem Thema der Klimatisierung durch Lüftung gewidmet. Hier sind beispielhaft die Arbeiten [30], [31] und [32] zu erwähnen, in denen unterschiedliche Lüftungskonzepte vorgeschlagen werden. Alle diese Verfahren haben allerdings gemein, dass der Erfolg vom Außenklima und hier im speziellen vom Wetter abhängig ist.



Abbildung 2.2: Mobile Klimatisierungsgeräte zur Befeuchtung (links) und zur Entfeuchtung (rechts) [28]

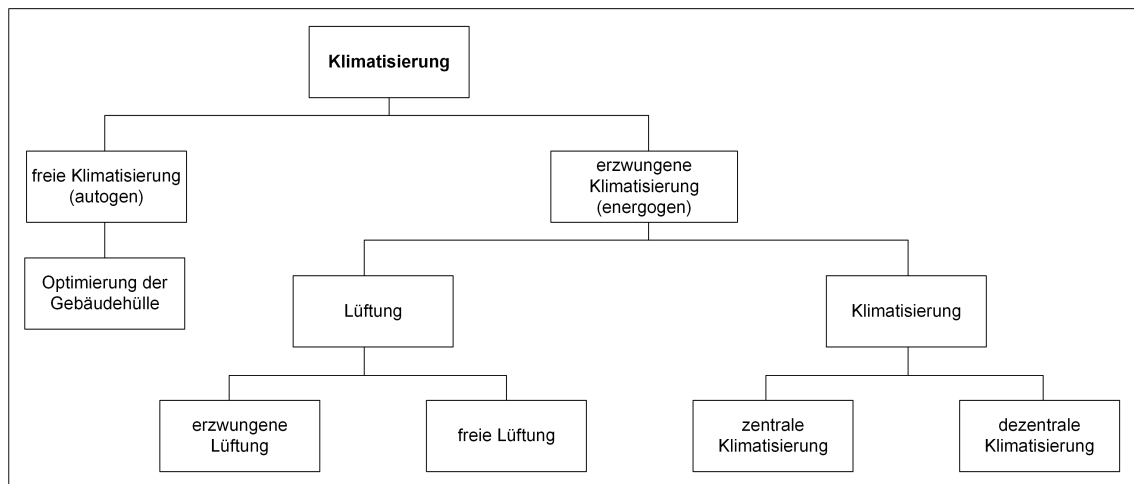


Abbildung 2.3: Methoden zur Klimatisierung in Anlehnung an [10] und [29].

Für eine Stabilisierung des Raumklimas eignen sich diese Methoden somit nur bedingt [20] und sollen im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden. Ebenso sollen die Verfahren der zentralen Klimatisierung aus den oben bereits genannten Gründen nicht weiter verfolgt werden. Im Fokus dieser Arbeit steht somit die dezentrale Klimatisierung, da sie aus den oben genannten Gründen häufig die einzige realisierbare Alternative darstellt.

2.4 Dezentrale Klimatisierung

Die zur dezentralen Klimatisierung notwendigen Geräte wurden exemplarisch bereits in Abbildung 2.2 gezeigt. Solche Geräte arbeiten aus regelungstechnischer Sicht zumeist mit einfachen schaltenden Reglern (vgl. [2], [28]),

die zwei oder geringfügig mehr Lüfterstufen ansteuern. Das Resultat einer solchen schaltenden Regelung sind deutliche Schwankungen im Kurzfristbereich, wie man sie beispielsweise bei Zwei-Punkt-Reglern häufig sieht. Dieser Umstand soll zunächst an einem exemplarischen Beispiel belegt werden. In [33] wurden Messungen in der Hamburger Kunsthalle dokumentiert, die das Ergebnis unterschiedlicher Klimatisierungskonzepte festhalten. Eine solche Messreihe ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

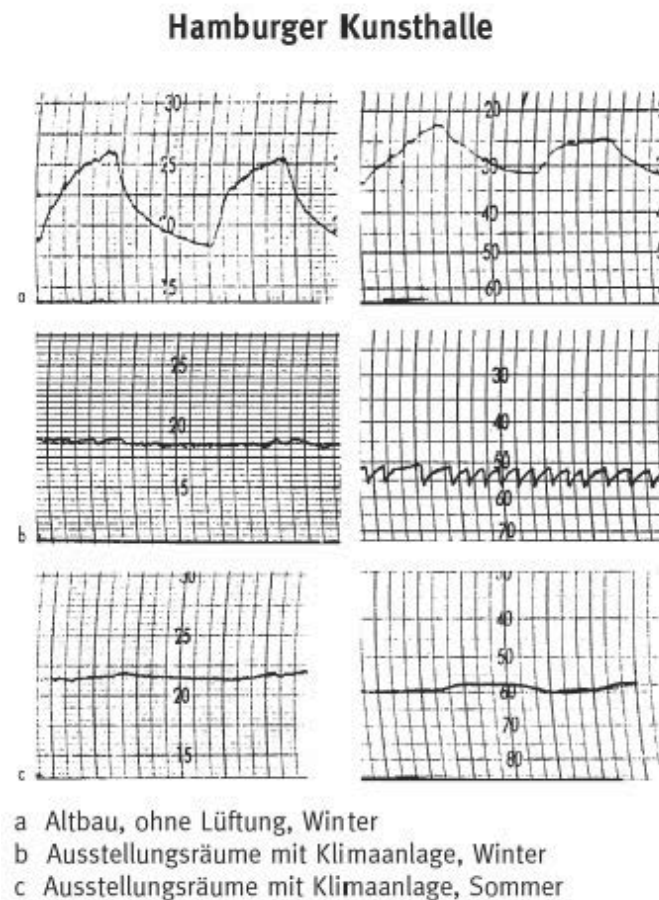


Abbildung 2.4: Ergebnis verschiedener Klimatisierungskonzepte aus [33].

Die obere Messreihe a) zeigt den zeitlichen Verlauf der relativen Luftfeuchte in einem Raum der über keinerlei raumluftechnische Anlagen verfügt. Das Klima gestaltet sich somit autogen und wird nur durch Lüftung unterstützt. Folgerichtig schwanken die Werte für Temperatur und relativer Luftfeuchte in Abhängigkeit des Außenklimas deutlich, und für ein Prä-

ventives Konservierungskonzept in Frequenz und Amplitude zu stark. Die zweite Messreihe zeigt einen Raum, der über dezentrale Klimatisierung mit mobilen Geräten klimatisiert wird. Zwar lassen sich die gewünschten stationären Bereiche langfristig besser einhalten, die deutlichen Schwankungen im Kurzfristbereich aufgrund der schaltenden Regelung (gerade bei der relativen Luftfeuchte) sind allerdings aus konservatorischen Gründen inakzeptabel. Letztere Messreihe zeigt die Ergebnisse bei Nutzung einer Vollklimaanlage und einem kontinuierlichen Regelungskonzept, welches leicht ersichtlich die besten Ergebnisse aus konservatorischer Sicht liefert. Die Gründe, warum diese Konzepte allerdings häufig nicht umsetzbar sind wurden bereits genannt. Das Ziel muss es daher sein, ein ähnliches Ergebnis wie im letzten Fall durch dezentrale Klimatisierung zu erhalten.

Ein weiterer Aspekt der Klimatisierung, auf den bisher noch nicht eingegangen wurde, ist die örtliche Verteilung des Raumklimas. Die Istwert-Erfassung der dezentralen Klimatisierung erfolgt bei heutigen Klimatisierungskonzepten in den meisten Fällen durch Messungen an einem Referenzort und berücksichtigt daher die örtliche Verteilung des Raumklimas nicht. Bereits in [20] wird darauf hingewiesen, dass die Regelung aus konservatorischer Sicht durch geeignete Sensorik objektnah im Raum zu kontrollieren ist (siehe Abbildung 2.5). Bei solchen Kontrollen ist dann meist festzustellen, dass eine Differenz zwischen den einzelnen externen Sensoren und, für die Regelung noch entscheidender, zu den Sensoren der Regelungseinheit auftritt, wie in Kapitel 6 verdeutlicht wird. Dieser Tatsache führt leicht ersichtlich zu großer Unzufriedenheit der Konservatoren und Restauratoren.

Die Probleme der örtlichen Verteilung des Raumklimas sind im Bereich der Präventiven Konservierung bereits bekannt und thematisiert worden. In [21] wird die Problematik klar angesprochen und auch hier ein örtlich verteiltes Messnetzwerk empfohlen. Die Messungen am „*falschen Ort*“ führen demnach häufig zu schlechten Regelungsergebnissen oder sogar zur Verschärfung des Problems [21]. Beispiele werden angeführt, bei denen am Referenzort (Raummitte) annehmbare Bedingungen der relativen Luftfeuchte herrschen

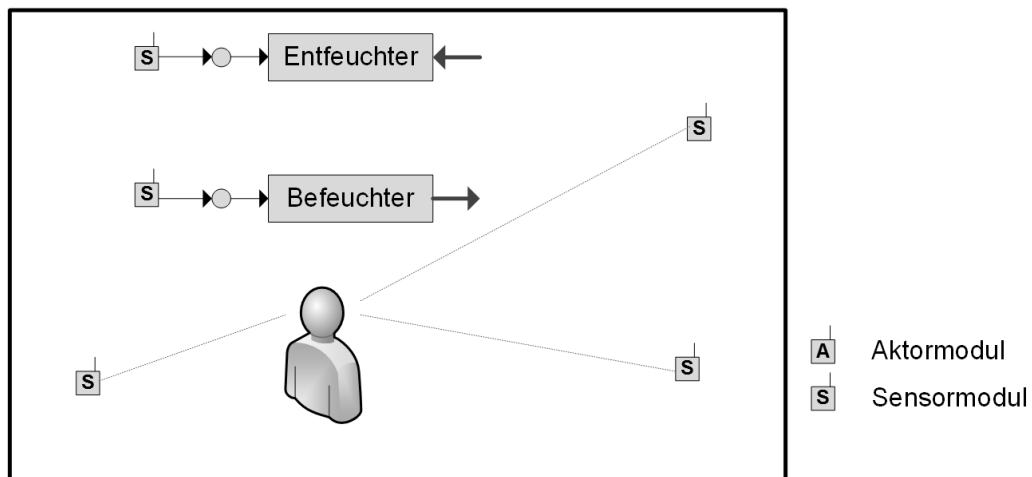


Abbildung 2.5: Kontrolle der konzentrierten Regelung durch zusätzliche Sensorik.

und es trotzdem durch gesättigte Verhältnisse an gewissen Stellen im Raum zu Schimmelpilzbildung kommt. Diese Argumente sprechen deutlich für eine örtlich verteilte Betrachtung des Raumklimas, auf die in Abschnitt 3.1 näher eingegangen wird.

Eine kurze Anmerkung sollte noch der Priorisierung von relativer Luftfeuchte und Temperatur dienen. Im Fokus dieser Arbeit steht die Stabilisierung der relativen Luftfeuchte, die aus konservatorischer Sicht als weitaus wichtiger erachtet wird als die Temperatur und daher als die maßgebliche Regelgröße in diesem Zusammenhang dienen soll [27]. Zunächst sollen aber die zum Verständnis des Raumklimaverhaltens nötigen physikalischen Grundlagen dargestellt werden.

2.5 Bauphysikalische Grundlagen des Raumklimaverhaltens

Das Raumklima in einem Objekt wird durch Wechselwirkungen des Außenklimas mit der Gebäudehülle, dem Interior und den technischen Einrichtungen, sowie der jeweiligen Nutzung bestimmt. Als physikalischer Begriff betrachtet umfasst das Raumklima die Wirkung von Wärme, Feuchte, Licht und Luft [20]. Das Raumklima ist damit sehr individuell an die Objekte gebunden. Für das weitere Verständnis dieser Arbeit sind die Begriffe Wär-

me und Feuchte von Interesse, die im Folgenden kurz erläutert werden. Für tiefergehende Informationen sei auf die Fachliteratur und insbesondere auf [10] verwiesen.

Bei der Wärme handelt es sich um eine Energieform, die sich als thermischer Zustand in der Temperatur ϑ widerspiegelt. Herrschen Temperaturdifferenzen zwischen Systemen, fließt Energie in Form von Wärme über die Systemgrenzen. Im allgemeinen ändert ein Objekt seine Temperatur, wenn man ihm Wärme entzieht oder zuführt. Wie stark sich die Temperatur ändert, hängt von der Wärmemenge und der Wärmekapazität ab.

Die aus konservatorischer Sicht bedeutsamere Größe des Raumklimas ist aber die Luftfeuchte. Das Medium Luft besitzt die Fähigkeit, Wasser in gasförmigem Zustand bis zu einer bestimmten Sättigung aufzunehmen. Wann die Luft den gesättigten Zustand einnimmt, hängt dabei wieder von der Temperatur ϑ ab. Das Verhältnis zwischen in der Luft enthaltenem gasförmigem Wasser, also Wasserdampf, und der maximal möglichen Wasserdampfaufnahme der Luft wird als relative Luftfeuchte bezeichnet:

$$\varphi_{\text{rel}} = \frac{\varphi_{\text{abs}}}{\varphi_{\text{abs,sat}}} \quad (2.5.1)$$

Die relative Luftfeuchte φ_{rel} wird folglich in % angegeben (hier wird der tiefstehende Zusatz rel zur Unterscheidung zwischen absoluter und relativer Luftfeuchte angegeben. Ohne explizite Angabe handelt es sich im Folgenden um die relative Luftfeuchte). Der mengenmäßig in der Luft enthaltene Wasseranteil wird als absolute Luftfeuchte bezeichnet und meistens in g/m^3 angegeben. Der Zusammenhang zwischen der absoluten Luftfeuchte φ_{abs} , der Temperatur ϑ und der relativen Luftfeuchte φ_{rel} ist im sogenannten Carrier-Diagramm dargestellt (siehe Abbildung 2.6).

Eine weitere Möglichkeit die Wasserdampfmenge zu quantifizieren, ist die Angabe des Wasserdampfpartialdrucks p_w . Diese Einheit wird in der Bauphysik häufig angewendet. Dabei wird dem Wasser ein Anteil am Gesamtdruck, also ein Partialdruck, zugeordnet, der sich am Mengenanteil orientiert. Mit den weiteren Luftbestandteilen wird ebenso verfahren, sodass man in der

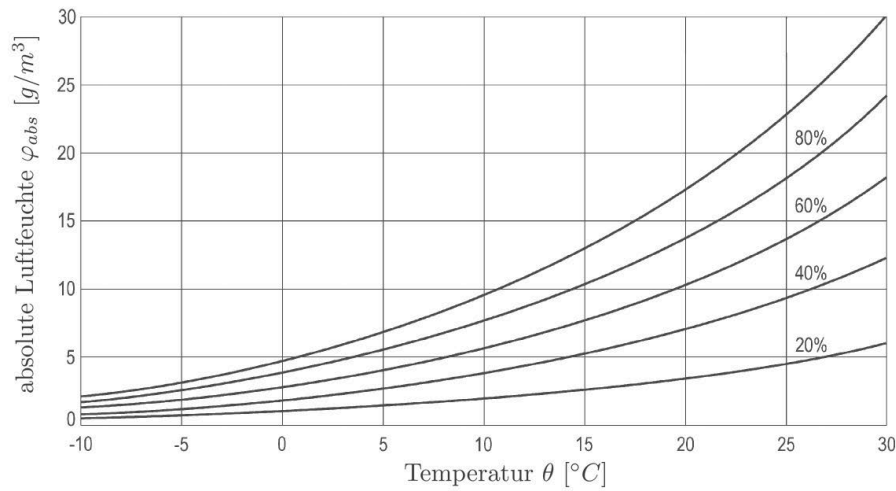


Abbildung 2.6: Zusammenhang zwischen Luftfeuchte und Temperatur im Carrier-Diagramm (in Anlehnung an [10])

Summe auf einen Gesamtluftdruck von 1 bar kommt, welcher für Erdoberflächenverhältnisse charakteristisch ist.

Aus bauphysikalischer Sicht lässt sich Luft als „ideales“ Gas beschreiben. Es gilt daher das ideale Gasgesetz mit der idealen Gaskonstante $R_\theta = 461,5 \text{ J/KgK}$:

$$p_w = \theta \cdot R_\theta \cdot \varphi_{\text{abs}} \quad (2.5.2)$$

Durch die proportionale Beziehung des Wasserdampfpartialdrucks p_w und der Wasserdampfkonzentration φ_{abs} erweitert sich Gleichung (2.5.1) zu:

$$\varphi_{\text{rel}} = \frac{\varphi_{\text{abs}}}{\varphi_{\text{abs,sat}}} = \frac{p_w}{p_{\text{sat}}} \quad (2.5.3)$$

Es existieren dabei zahlreiche Approximationen zur Angabe des saturierten Wasserdampfpartialdrucks. Eine exemplarische Möglichkeit findet sich in [34, 35]:

$$p_{\text{sat}} = a \left(b + \frac{\theta}{100^\circ\text{C}} \right)^n \quad (2.5.4)$$

Die Parameter sind je nach Temperaturbereich aus folgender Tabelle zu entnehmen [35]:

	$0^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 30^{\circ}\text{C}$	$-20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 0^{\circ}\text{C}$
a	$288,68Pa$	$4,689Pa$
b	1,098	1,486
n	8,02	12,30

Tabelle 2.1: Approximative Werte zur Beschreibung des saturierten Wasserdampfpartialdruckes aus [34]

Da die freie Dynamik des Innenklimas maßgeblich vom Außenklima bestimmt wird, sollten die jahreszeitlichen Klimaschwankungen ebenfalls in Betracht gezogen werden. Abbildung 2.7 zeigt einen solchen Zusammenhang über Monatsmittelwerte für Temperatur und relativer Luftfeuchte.

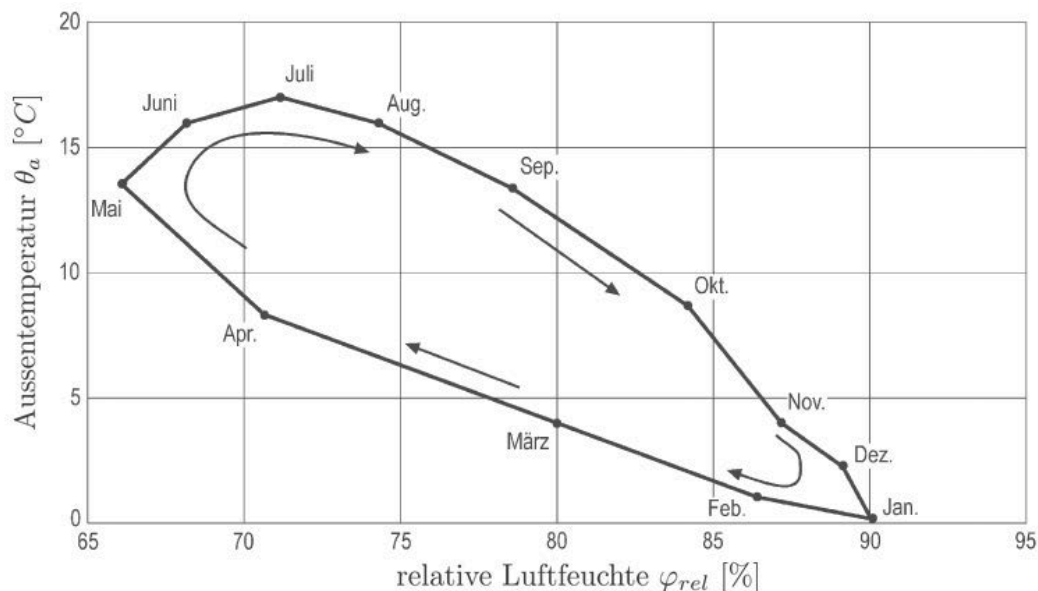


Abbildung 2.7: Durchschnittlicher jahreszeitlicher Verlauf von Temperatur und relativer Luftfeuchte (in Anlehnung an [10])

Es ist deutlich erkennbar, dass die relative Luftfeuchte bei sinkenden Temperaturen steigt, wie es ebenfalls im Carrier-Diagramm in Abbildung 2.6 erkennbar ist. Betrachtet man dieses Verhalten wird klar, dass gerade im Winterhalbjahr durch Lüftungen und sonstigen Luftwechsel ungünstige Klimabedingungen in die Objekte gelangen. Dabei entstehen solche Luftwechsel zwangsläufig, beispielsweise durch Fugen an Fenstern und Türen und sorgen für einen ständigen Austausch der Luft. Die Geschwindigkeit mit der sich

die Luft in einem Raum „erneuert“ wird über die Luftwechselrate n_{LWR} bestimmt. Die Luftwechselrate ist ein Maß dafür, wie oft das komplette Raumvolumen V_R pro Stunde ausgetauscht wird. Die Wasserdampfströme werden daher maßgeblich von der Luftwechselrate n_{LWR} bestimmt. Die Feuchtebilanz kann aus dem einfließenden Wasserdampfstrom:

$$G_{a \rightarrow i} = n_{\text{LWR}} \cdot V_R \cdot \varphi_{\text{abs,sat},a} \cdot \varphi_a \cdot \frac{T_a}{T_i} \quad (2.5.5)$$

mit den absolut Temperaturen T_i und T_a und dem ausfließenden Wasserdampfstrom:

$$G_{i \rightarrow a} = n_{\text{LWR}} \cdot V_R \cdot \varphi_{\text{abs,sat},i} \cdot \varphi_i \quad (2.5.6)$$

und dem im Raum produzierten Wasserdampfstrom G_i berechnet werden:

$$G_{a \rightarrow i} + G_i = G_{i \rightarrow a} \quad (2.5.7)$$

Für die relative Luftfeuchte innerhalb eines Objektes φ_i ergibt sich somit nach kurzer Rechnung:

$$\varphi_i = \varphi_a \cdot \frac{\varphi_{\text{abs,sat},a}}{\varphi_{\text{abs,sat},i}} \cdot \frac{T_a}{T_i} + \frac{G_i}{n_{\text{LWR}} \cdot V \cdot \varphi_{\text{abs,sat},i}} \quad (2.5.8)$$

In Gleichung (2.5.8) wird deutlich, wie sich die relative Luftfeuchte aus einem Anteil des Aussenklimas (erster Summand) und einem Anteil innenliegender Feuchtequellen (zweiter Summand) zusammensetzt. Solche innenliegenden Feuchtequellen können Menschen, Tiere, Pflanzen, Maschinen oder sonstiges Interior sein. Der Begriff Interior meint in diesem Zusammenhang sämtliche hygroskopische Materialien, dass heißt Materialien die in der Lage sind Feuchtigkeit aus der Umgebung zu binden. Hierzu zählt beispielsweise auch ein Großteil des schützenswerten Kulturguts.

3 Grundlagen örtlich verteilter Systeme

Die Systeme, die Gegenstand dieser Arbeit und insbesondere dieses Kapitels sind, charakterisieren sich dadurch, dass sie eine signifikante räumliche Ausdehnung aufweisen und sich ihre Zustände innerhalb dieser Ausdehnung deutlich voneinander unterscheiden. In der Literatur werden sie als verteilt-parametrische Systeme, Systeme mit örtlich verteilten Parametern oder wie im Folgenden als örtlich verteilte Systeme bezeichnet. Meistens handelt es sich bei solchen Systemen um Prozesse mit signifikanten inneren Ausgleichvorgängen, wie Wärmeleitungsvorgänge oder Diffusionsprozesse [36, 37]. Das Gegenstück zu örtlich verteilten Systemen bilden konzentriert-parametrische Systeme. Sie bilden auch die überwiegende Mehrheit der in der Regelungstechnik betrachteten Systeme, wenn auch oft als bewusste Vereinfachung.

Dennoch weisen generell alle realen Systeme eine örtliche Verteilung der Parameter auf. Allerdings reicht es bei vielen technischen Prozessen aus, die Parameter näherungsweise als konzentriert zu betrachten. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Dynamik des Gesamtsystems um ein vielfaches höher ist, als die Dynamik der beschriebenen inneren Ausgleichsvorgänge. Als klassisches Beispiel aus der Regelungstechnik kann hier das inverse Pendel genannt werden. Die zu balancierende Masse wird meist als punktförmig in einem Abstand l zum Ursprung der Bewegung betrachtet, was zur Lösung der Stabilisierungsaufgabe hinreichend ist.

Nichtsdestotrotz lassen sich Systeme nicht pauschal konzentriert-parametrisch betrachten und im Einzelfall muss abgewogen werden, ob eine solche Betrachtung ausreicht. Ein Beispiel an dem sich dies leicht verdeutlichen lässt,

ist die Betrachtung einer elektrischen Leitung. Abbildung 3.1 zeigt hierzu ein Ersatzschaltbild einer solchen Leitung.

Es ist leicht ersichtlich, dass die hier vorkommenden Parameter L , R und

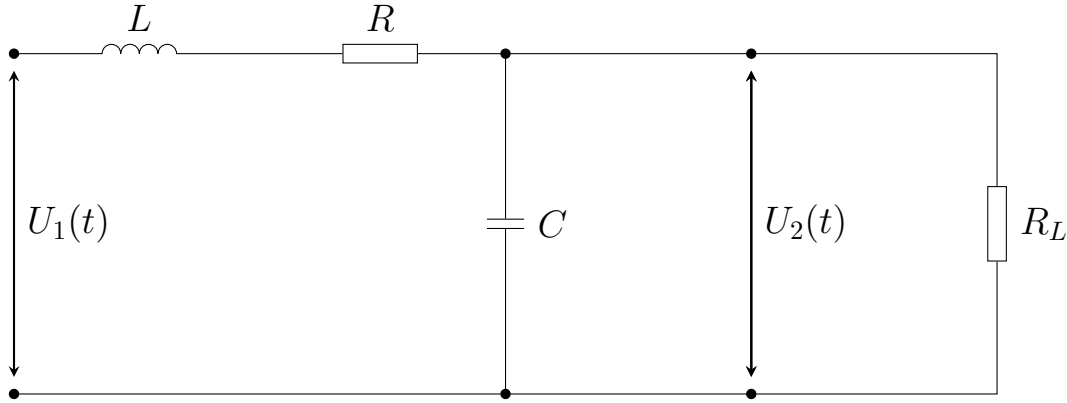


Abbildung 3.1: Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung als konzentriert-parametrisches System

C nicht punktuell an einer Stelle der Leitung auftreten. Aus diesem Grund wird in der Literatur auch vom Widerstandsbelag R_B , Induktivitätsbelag L_B und Kapazitätsbelag C_B [38] gesprochen. Somit lässt sich Abbildung 3.1 allenfalls als Ersatzdarstellung einer elektrischen Leitung mit konzentrierten Parametern beschreiben. Diese Ersatzdarstellung kann für gewisse Betriebszustände das System durchaus hinreichend beschreiben. Eine exaktere Beschreibung folgt allerdings, wenn die Leitung in mehrere Abschnitte der Länge Δx aufteilt wird und anstatt mit den konzentrierten Parameterwerten mit den längenbezogenen Belägen gerechnet wird. Dieses Vorgehen verdeutlicht Abbildung 3.2.

Werden für dieses Beispiel Knoten- und Maschengleichungen aufgestellt, folgt das örtlich verteilte System:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) - R_B \Delta x \cdot i(x, t) - L_B \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ i(x + \Delta x, t) &= i(x, t) - C_B \Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

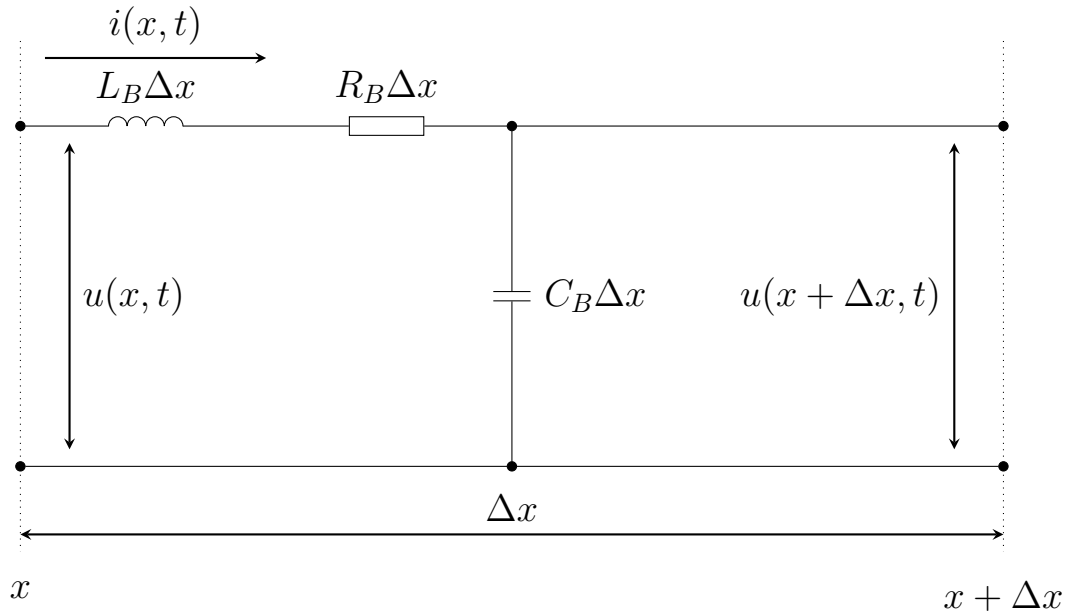


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung als örtlich verteiltes System

Umgeformt ergeben sich folgende Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} &= -R_B \cdot i(x, t) - L_B \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} &= -C_B \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

Für hinreichend kleine Abschnitte Δx stellt Gleichung (3) eine ausreichend genaue Näherung dar. Werden die Überlegungen weiter geführt und der untere Grenzwert der Schrittweite Δx betrachtet, resultieren die bekannten Gleichungen zur Beschreibung einer elektrischen Leitung:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -R_B \cdot i(x, t) - L_B \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} &= \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C_B \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Das Beispiel der elektrischen Leitung zeigt, dass eine Pauschalbetrachtung als konzentriert-parametrisches System nicht zulässig ist. Für kurze Leitungslängen l mag die Näherung aus Abbildung 3.1 ausreichen, für eine kilometerlange Leitung mit einer Anregung 50 Hz allerdings nicht.

Wie bereits zuvor erwähnt, kann die örtliche Verteilung durch eine Reihenschaltung mehrerer konzentrierter Ersatzschaltbilder berücksichtigt werden. Je höher die Anzahl der Ersatzschaltbilder, also der Anzahl der Abschnitte, je besser wird das Ergebnis. Allerdings entsteht dann ein Differentialgleichungssystem, welches eine enorme Größe aufweisen kann. Deshalb verfolgt man den Weg wie er in Gleichung (3) beschrieben wurde und betrachtet die örtliche Verteilung kontinuierlich. Dabei entstehen partielle Differentialgleichungen (PDE) die das System beschreiben. Die Zustandsgrößen sind demnach nun nicht mehr nur von der Zeit t abhängig, sondern auch von mindestens einer Ortsvariablen x . Ein örtlich verteiltes System ist somit per Definition ein System, bei der mindestens eine innere Zustandsgröße von mindestens einer Ortsvariablen abhängt (vgl. [37]).

3.1 Grundlagen der örtlichen Verteilung des Raumklimas

Eine Motivation zur Betrachtung des Raumklimas als örtlich verteiltes System wurde aus konservatorischer Sicht bereits in Abschnitt 2.4 gegeben und soll im Folgenden aus technischer Sicht näher beleuchtet werden.

Den Stand der Technik in der Raumklimabetrachtung bildet immer noch die Annahme perfekt durchmischter Räume [39, 40]. Ein Grund hierfür ist, dass bisher keine praktikablen mathematischen Modelle vorliegen, oder diese extrem aufwendig zu untersuchen sind [39, 41]. Aus thermischer Sicht sind in der jüngeren Vergangenheit tatsächlich einige Arbeiten zu finden, die sich mit der räumlichen Verteilung der Luft befassen [39, 40, 7, 42, 43]. Dabei geht es wie bereits erwähnt meistens um den thermischen Komfort in Gebäuden. In [7] wird beispielsweise ein sogenanntes „*zonales Modell*“ vorgestellt um die Temperaturverteilung im Raum besser beschreiben zu können, auf das in Abschnitt 3.2 näher eingegangen wird. Die in der Literatur existierenden Verfahren sollen im Folgenden kurz dargestellt und ihre Vor- und Nachteile näher beleuchtet werden.

Dabei ist der Ausgangspunkt zunächst die vollständige mathematische Beschreibung der örtlichen Luftverteilung als generelles Strömungsproblem der Fluidodynamik [42, 44].

3.1.1 Örtliche Luftverteilung als generelles Strömungsproblem der Fluidodynamik

Die detaillierteste Beschreibung der örtlichen Verteilung der Luft, respektive des Raumklimas, erhält man, wenn diese als generelles Strömungsproblem der Fluidodynamik betrachtet wird. Diese Betrachtungsweise ist beispielsweise aus den „*Computational Fluid Dynamics (CFD)*“ und den daher entstandenen CFD-Simulationen bekannt. Die CFD-Technik wurde ursprünglich eingesetzt, um Strömungsprobleme in der Luftfahrt berechnen zu können [41].

Die Hürde zum Einsatz von CFD-Simulationen im Bereich der Gebäudesimulation bestand lange Zeit in der hohen Komplexität solcher Simulationen. Für eine aussagekräftige und realitätsnahe Simulation müssen häufig Codeanpassungen und a priori Annahmen getroffen werden, die ein hohes Verständnis dieser Technik erfordern. Erst in jüngerer Vergangenheit, in den letzten 10-15 Jahren, lassen sich einige Beispiele zum Einsatz von CFD-Simulationen im Bereich der Gebäudeplanung und Gebäudediagnostik finden, wie beispielsweise in [41, 45]. Im Bereich der Regelungstechnik, insbesondere des Reglerentwurfs für örtlich verteilte Systeme, existieren nur einige wenige Veröffentlichungen (z.B. [39]). Bei allen bekannten Arbeiten werden die CFD-Simulationen dabei eingesetzt um lineare reduzierte Modelle zu identifizieren und diese im weiteren Verlauf zum Reglerentwurf zu verwenden (siehe exemplarisch [46, 47]). Dabei werden zahlreiche vereinfachende Annahmen vorgenommen die teilweise die Modellgüte deutlich negativ beeinflussen. Hier ist die ausschließlich lineare Betrachtung der Zusammenhänge zu nennen, die häufig nicht ausreicht [42, 44], wie in Abschnitt 6 gezeigt wird. Aus diesem Grund sollen die grundlegenden mathematischen Zusammenhänge der örtlichen Verteilung des Raumklimas

im Folgenden dargestellt werden. Sie bilden die Basis der weiteren Arbeit. Der interessierte Leser findet weitere detaillierte Ausführungen zum Thema in [42, 44].

Prinzipiell erfolgt die mathematische Modellierung durch die bekannten Erhaltungssätze, die selbstverständlich auch für örtlich verteilte Systeme gelten müssen. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, dass nicht nur die transienten Änderungen, zum Beispiel durch Energieumwandlung, erhalten werden müssen, sondern ebenfalls die Ein- und Ausflüsse aus definierten Volumen berücksichtigt werden müssen. Dabei spielt es zunächst einmal keine Rolle um welche physikalische Größe es sich bei der Betrachtung handelt. Aus diesem Grund wird eine Bezugsvariable ϕ eingeführt, für die im Folgenden die Erhaltungssätze hergeleitet werden und die eine beliebige physikalische Eigenschaft annehmen kann, wie beispielsweise Massenanteile, Geschwindigkeiten oder interne Energie. Zunächst wird das dreidimensionale Volumen aus Abbildung 3.3 mit der räumlichen Ausdehnung dx , dy , dz betrachtet.

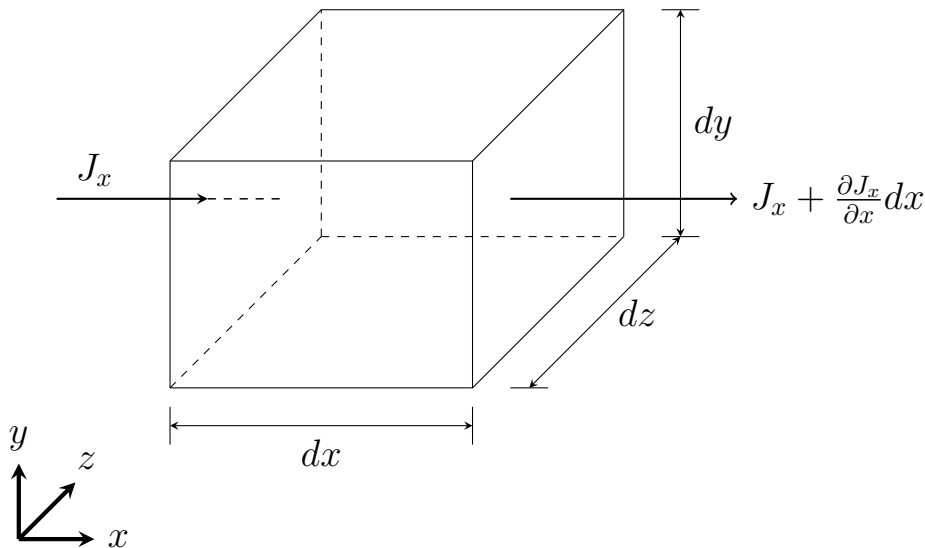


Abbildung 3.3: Räumliche Bilanzierung über Ein- und Ausflüsse in Anlehnung an [42].

Ein definierter Eingangsstrom J_x fließt in die Ebene, die von dy und dz aufgespannt wird. Diesem Eingangsstrom steht auf der anderen Seite ein Ausgangsstrom $J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx$ gegenüber, der sich aus dem einfließenden Strom

und seiner örtlichen Änderung zusammensetzt. Offensichtlich muss demnach aus Gründen der Erhaltung gelten:

$$J_x = J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial J_x}{\partial x} \cdot dx = 0 \quad (3.1.1)$$

Geht man von dieser punktuellen Betrachtung über zur flächenmäßigen Betrachtung, das heißt zur Berechnung des Ausflusstroms über die komplette von dy und dz aufgespannte Fläche, erhält man :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (3.1.2)$$

Gleichung (3.1.2) beschreibt demnach Bilanzierung des Volumens in x -Richtung. Nimmt man die Richtungen y und z mit in die Betrachtung, erhält man für die Bilanzierung des kompletten Volumens:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial J_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial J_z}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (3.1.3)$$

Leicht ersichtlich beschreibt der Ausdruck $dx \cdot dy \cdot dz$ gerade das Volumen V_R . Somit erhält man die Bilanzierung aus örtlich verteilter Sicht für ein bestimmtes Volumen V_R in kompakter Form:

$$V_R \cdot \left[\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right] = V \cdot \nabla J = 0 \quad (3.1.4)$$

Da die Strömungsgrößen J ein Vektorfeld bilden, kann die Bilanzierung für ein bestimmtes Volumen als Divergenz des Vektorfeldes bestimmt werden, wie Gleichung (3.1.4) zeigt.

Neben der räumlichen Bilanzierung spielt auch die transiente Erhaltung der betrachteten Größe eine Rolle. Für eine spezifische Größe ϕ mit der Dichte ρ gilt für die Menge pro Volumen $\rho\phi$. Somit ist die zeitliche Änderungsrate der betrachteten Größe gegeben durch:

$$V_R \cdot \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} \quad (3.1.5)$$

Mit den bis hierhin hergeleiteten Erhaltungssätzen lassen sich die grundlegenden Vorgänge in Strömungs- oder Transportprozessen beschreiben. Ein

generelles Strömungsproblem setzt sich dabei aus der zeitlichen Änderungsrate der Strömungsgröße ϕ , einem konvektiven Fluss K_ϕ , einem diffusiven Fluss D_ϕ und zusätzlichen sonstigen Quelltermen Q_ϕ zusammen [48]. Mit diesen Flussgrößen, sowie der Änderungsrate und den Quelltermen ist das Strömungsproblem vollständig beschrieben:

$$V_R \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + K_\phi + D_\phi = Q_\phi \quad (3.1.6)$$

In Gleichung (3.1.4) wurde bereits allgemein die Bilanzierung von Strömungs- bzw. Flussgrößen hergeleitet. Mit Hilfe des ersten Fick'schen Gesetz [49] ergibt sich für die Teilchenstromdichte, also den durch Diffusion verursachten Fluss mit dem Diffusionskoeffizienten Γ :

$$J_{Diff} = -\Gamma \cdot \nabla \phi \quad (3.1.7)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.1.4) ergibt sich für den diffusiven Fluss

$$D_\phi = -V \cdot \nabla (\Gamma \nabla \phi) \quad (3.1.8)$$

Unter dem konvektiven Fluss versteht man den Transport einer gewissen Menge der betrachteten Strömungsgröße ϕ , bedingt durch die Bewegung des Fluids mit der Geschwindigkeit \underline{v} , wobei \underline{v} die Geschwindigkeitskomponenten in x -, y -, und z -Richtung beinhaltet. Somit ergibt sich für die konvektive Strömung J_{Kon} :

$$J_{Kon} = \rho \underline{v} \phi \quad (3.1.9)$$

Ebenfalls eingesetzt in (3.1.4) erhält man für den konvektiven Fluss K_ϕ :

$$K_\phi = V \cdot \nabla (\rho \underline{v} \phi) \quad (3.1.10)$$

Zusammenfassend erhält man, wenn man alle Komponenten in Gleichung (3.1.6) einsetzt, einen Prototypen für generelle Strömungsprobleme mit der allgemeinen Strömungsgröße ϕ :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla (\rho \underline{v} \phi) = \nabla (\Gamma \nabla \phi) + Q_\phi \quad (3.1.11)$$

Alle für diese Arbeit relevanten Strömungsprozesse lassen sich auf die prototypische Form (3.1.11) zurückführen oder sich aus dieser ableiten. Dabei kann die bis hierhin allgemein formulierte Strömungsgröße ϕ , wie bereits zuvor erwähnt, sämtliche relevante Größen wie beispielsweise Temperatur, Massenanteile, Geschwindigkeit oder ähnliches annehmen. Wählt man als Strömungsgröße beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld $\phi = \underline{v}$ resultiert daraus der Impulserhaltungssatz und somit die bekannten Navier-Stokes Gleichungen. Der Vorteil der generellen Formulierung des Strömungsproblems durch Gleichung (3.1.11) ist, dass auch generelle Lösungsansätze einmalig entwickelt werden können und anschließend die allgemeine Strömungsgröße ϕ sowie der Koeffizient Γ und der Quellterm Q_ϕ spezifiziert werden.

3.1.2 Lösungsansatz über Diskretisierungsmethoden

Im vorherigen Abschnitt wurden die Gesetzmäßigkeiten eines generellen Strömungsproblems hergeleitet, zu denen auch die örtliche Verteilung des Raumklimas gehört. Dabei stellt Gleichung (3.1.11) eine kontinuierliche Formulierung des Problems, sowohl bei der zeitlichen als auch räumlichen Betrachtung dar. Im kontinuierlichen Wertebereich sind solche partiellen Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht lösbar [42]. Aus diesem Grund geht man zur Lösung des Problems dazu über, die Strömungsgröße nur an einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten zu berechnen und folglich die kontinuierliche Formulierung zu diskretisieren. Diese Vorgehensweise ist in der Literatur auch als Finite-Differenzen-Methode [50] bekannt und wird beispielsweise zur Berechnung von CFD-Simulationen eingesetzt. Betrachtet wird im Folgenden zunächst ein eindimensionales Gitter, wie in Abbildung 3.4 dargestellt.

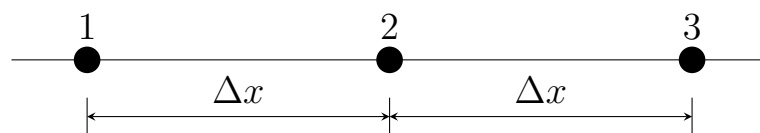


Abbildung 3.4: Eindimensionales Gitter mit drei Knotenpunkten.

Für eine approximierte Lösung des Problems lassen sich die Ableitungen der partiellen Differentialgleichung als Taylor-Reihenentwicklung darstellen. Für die Strömungsgrößen an den Knotenpunkten 1 und 3 folgt demnach:

$$\phi_1 = \phi_2 - \Delta x \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.1.12a)$$

$$\phi_3 = \phi_2 + \Delta x \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.1.12b)$$

Stellt man das gegebene Gleichungssystem nach der ersten und zweiten Ableitung um, bricht die Taylor-Reihenentwicklung (wie häufig) jeweils nach dem dritten Glied ab und vernachlässigt somit das Restglied, erhält man für die Approximation der Ableitungen folgende Ausdrücke:

$$\left(\frac{d\phi_2}{dx} \right) \approx \frac{\phi_3 - \phi_1}{2\Delta x} \quad (3.1.13a)$$

$$\left(\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \right) \approx \frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.13b)$$

Dieses reduzierte Beispiel zeigt, wie man aus der kontinuierlichen partiellen Differentialgleichung (3.1.11) durch Diskretisierung mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung der Schrittweite Δx eine Differenzengleichung erhält. Eine allgemeine Formulierung für den eindimensionalen Fall erfolgt über den variablen Knotenpunkt i :

$$\left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.1.14a)$$

$$\left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2} \right) \approx \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.14b)$$

Der obige Ausdruck wird auch als zentraler Differenzenquotient bezeichnet. Es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten, Differenzenquotienten zu bilden. Hierzu sei auf [51] verwiesen. Es ist allerdings offensichtlich, dass die Approximationsgenauigkeit mit größer werdender Schrittweite Δx abnimmt.

Eine exakte Lösung der Ableitungen erhält man lediglich für:

$$\left(\frac{d\phi_i}{dx}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.1.15a)$$

$$\left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.15b)$$

Diesen Zusammenhang nutzen CFD-Simulationen aus, sofern Sie mit der Methode der Finiten-Differenzen arbeiten, in dem Sie die Anzahl der Gitterpunkte sehr hoch wählen, das heißt das Gitter sehr fein auflösen und somit den Diskretisierungsfehler möglichst gering halten. Dies wird allerdings durch enorme Komplexität und sehr hohen Rechenaufwand erkauft. Man geht daher zu iterativen Lösungen über, die allerdings sogar mit der heute verfügbaren Rechenleistung extrem zeitaufwendig sind [48].

Bisher wurden nur der örtlich verteilte stationäre Teil betrachtet. Aus diesem Grund wurde auch die Zeitabhängigkeit der Variablen in den Gleichungen bisher nicht angegeben, die aber selbstverständlich vorhanden ist und im Folgenden für die Approximation des transienten Teils benötigt wird. Um zu einer diskreten algebraischen Form von Gleichung (3.1.11) zu kommen muss allerdings ebenfalls die Zeit diskretisiert werden. Es wird also im Folgenden mit der diskreten Zeit $t = k\Delta t$ mit der Abtastzeit Δt und $k \in \mathbb{Z}^+$ gerechnet. Dabei wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Notation $\phi_i[k\Delta T] = \phi_i^k$ mit dem Abtastschritt k als hochgestelltem Index festgelegt. Für Ableitungen der Strömungsgröße ϕ_i an einem beliebigen Knotenpunkt i nach der Zeit folgt mit dem vorwärtsgerichteten Differenzenquotient:

$$\left(\frac{d\phi_i}{dt}\right) \approx \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} \quad (3.1.16a)$$

$$\left(\frac{d^2\phi_i}{dt^2}\right) \approx \frac{\phi_i^{k+1} - 2\phi_i^k + \phi_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.1.16b)$$

Um den Einsatz der Finite-Differenzen Methode anschaulich darzustellen, wird ein reduziertes Beispiel einer eindimensionalen Wärmeübertragung

verwendet, die gegeben ist durch:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.1.17)$$

Die Strömungsgröße entspricht in diesem reduzierten Beispiel der Temperatur $\phi = \vartheta$. Um bei der allgemeinen Schreibweise zu bleiben, wird weiterhin die generelle Strömungsgröße ϕ verwendet. Die partiellen Ableitungen in Gleichung (3.1.17) lassen sich durch die Entsprechungen (3.1.14) und (3.1.16) für einen Knotenpunkt i ersetzen:

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = c \frac{\phi_{i+1}^k + \phi_{i-1}^k - 2\phi_i^k}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.18)$$

Formt man (3.1.18) nach ϕ_i^{k+1} um, resultiert ein Modell der eindimensionalen instationären Wärmeübertragung an spezifischen Gitterpunkten $i = 1, \dots, n$:

$$\phi_i^{k+1} = \underbrace{\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} [\phi_{i+1}^k + \phi_{i-1}^k]}_{\lambda_1} + \underbrace{\left[1 - \frac{2c\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]}_{\lambda_2} \phi_i^k = \lambda_1 (\phi_{i-1}^k + \phi_{i+1}^k) + \lambda_2 \phi_i^k \quad (3.1.19)$$

Konsequenterweise erhält man für alle Knotenpunkte ein Gleichungssystem, was sich wie folgt formulieren lässt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^{k+1} \\ \phi_2^{k+1} \\ \phi_3^{k+1} \\ \vdots \\ \phi_{n-2}^{k+1} \\ \phi_{n-1}^{k+1} \\ \phi_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{\Phi^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^k \\ \phi_2^k \\ \phi_3^k \\ \vdots \\ \phi_{n-2}^k \\ \phi_{n-1}^k \\ \phi_n^k \end{bmatrix}}_{\Phi^k} \quad (3.1.20)$$

Zwar handelt es sich bei (3.1.20) um ein reduziertes Beispiel eines Strömungsproblems, die Vorgehensweise ist allerdings direkt übertragbar. Auch

für höherdimensionale Probleme lässt sich das Verfahren anwenden, wenn gleich man festhalten muss, dass durch zusätzliche Freiheitsgrade ein größeres und komplexeres System entsteht. Die Umsetzung für solche höherdimensionalen Probleme, wie es beispielsweise die örtliche Verteilung des Raumklimas darstellt, wird in Kapitel 6 ausführlich beschrieben.

Dennoch sollte das Schema der entstandenen Matrix A nochmals genauer betrachtet werden. Für das eindimensionale Problem entsteht eine Tridiagonalmatrix. Das bedeutet, dass sich die Änderung der Strömungsgröße lediglich aus dem vorangegangenen Wert und den direkt benachbarten Knotenpunkten zusammensetzt. Hinzu kommen zusätzliche mögliche Quellterme, die im obigen reduzierten Beispiel nicht vorhanden waren. Dieser prinzipielle Zusammenhang findet sich im übrigen auch bei Anwendungen anderer Lösungsverfahren, wie den Finite-Volumen Methoden wieder [48]. Auch im höherdimensionalen Fall wird später gezeigt, dass dieser Zusammenhang weiterhin gilt, auch wenn die Zusammensetzung der Matrix A bzw. der Differenzenquotienten durch die zusätzlichen Freiheitsgrade in den anderen Dimensionen schwieriger wird.

3.1.3 Systemtheoretische Analyse von Strömungsproblemen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die mathematischen Grundlagen zur Formulierung genereller Strömungsprobleme geliefert. Diese sollen im Folgenden etwas näher beleuchtet werden. Die prototypische Gleichung zur Beschreibung von Strömungsproblemen war gegeben durch:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla (\rho \underline{v} \phi) = \nabla (\Gamma \nabla \phi) + Q_\phi \quad (3.1.21)$$

Die einzelnen Bestandteile von Gleichung (3.1.21) sollen nun näher untersucht werden. Der transiente Anteil der partiellen Differentialgleichung $\partial \rho \phi / \partial t$ sieht auf den ersten Blick nach einem linearen System aus und wird auch häufig als linear angenommen, wie beispielsweise beim Ansatz der zonalen Modelle, die später noch besprochen werden. Allerdings täuscht

der erste Eindruck, denn die Annahme einer konstanten Dichte $\rho = \text{const.}$ gilt nur für inkompressible Fluide, wie es für Wasser allgemein angenommen wird. Das Raumklima allerdings, respektive das Medium Luft, ist als kompressibel zu betrachten und somit gilt für die Dichte $\rho \neq \text{const.}$. Ferner kann Luft mit hinreichender Genauigkeit als ideales Gas angesehen werden. Somit gilt für die Dichte das ideale Gasgesetz:

$$\rho = \frac{p}{R_s \vartheta} \quad (3.1.22)$$

mit dem statischen Druck p , der spezifischen Gaskonstante R_s und der Temperatur ϑ . Entscheidend ist hierbei vor allem die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur. Angenommen es wird ein Wärmeübertragungsproblem betrachtet, wie in die Wärmeübertragung (3.1.17) oder der Temperaturverteilung in einem Raum, so ist die Strömungsgröße ϕ ebenfalls die Temperatur $\phi = \vartheta$. Aus dem linearen Zusammenhang in Gleichung (3.1.21) wird somit ein nichtlinearer Zusammenhang.

Ähnlich verhält es sich mit dem konvektiven Fluss $\nabla(\rho \underline{v} \phi)$. Sofern die relevante Strömungsgröße wieder der Temperatur entspricht, resultiert die bekannte Abhängigkeit der Dichte von der Strömungsgröße. Aber auch bei anderen Strömungsgrößen können hier nichtlineare Zusammenhänge auftreten. Nimmt man als Beispiel die bekannten Navier-Stokes Gleichungen zur Formulierung der Impulserhaltung, so ist die Strömungsgröße selbst das Geschwindigkeitsfeld $\phi = \underline{v}$ und somit wird das Argument des Nabla-Operators nichtlinear. Eine weitere Quelle nichtlinearen Verhaltens findet sich im Diffusionskoeffizienten Γ und im Quellterm Q_ϕ , die beide im Normalfall nichtlinear von der relevanten Strömungsgröße abhängen [42, 48].

Eine Folge dieser Zusammenhänge ist, dass die Koeffizienten der Matrix A in Gleichung (3.1.20) des reduzierten eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems, aber auch sämtlicher im weiteren Verlauf der Arbeit betrachteter Probleme, keine Konstanten sind, sondern Funktionen in Abhängigkeit der relevanten Strömungsgröße ϕ . Somit resultiert ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, beziehungsweise nichtlinearer Differenzenglei-

chungen nach Anwendung der Diskretisierungsmethoden. Nichtsdestotrotz werden in vielen Verfahren, die in der Literatur zu finden sind, häufig vereinfachende Annahmen getroffen, wie die Annahme linearen Systemverhaltens. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich der Umgang mit den Modellgleichungen erheblich. Allerdings können diese Annahmen bezüglich der Modellgüte zu teilweise erheblich schlechteren Ergebnissen führen, wie in Abschnitt 6.4 gezeigt wird.

3.2 Modelle zur Raumklimamodellierung

Neben den bereits erwähnten CFD-Simulationen soll im Folgenden der Stand der Technik in der Raumklimamodellierung dargestellt werden. Dies dient vor allem zur Abgrenzung dieser Arbeit zu den vorhandenen Verfahren. CFD-Simulationen stellen dabei das Extrem an hoher räumlicher Auflösung und Genauigkeit dar, was die hohe benötigte Rechenkapazität erklärt. Im Gegensatz dazu stellen „*Ein-Zonen Modelle*“ die einfachste Möglichkeit der Klimamodellierung dar.

3.2.1 Ein-Zonen Modelle

Bei der Betrachtung des Raumklimas durch „*Ein-Zonen Modelle (EZM)*“ wird die Raumluft innerhalb einer Betrachtungseinheit, beispielsweise eines Raumes, als perfekt durchmischt betrachtet (vgl. Abbildung 3.5).

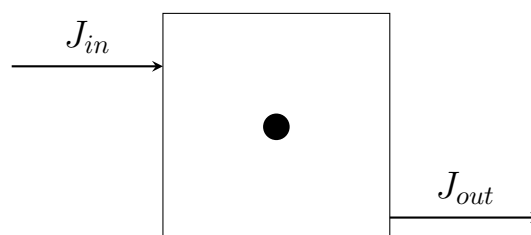


Abbildung 3.5: Schema eines Ein-Zonen Modells

Sowohl die Temperatur, als auch weitere möglicherweise relevante Größen wie relative Luftfeuchte oder Druck sind demnach per Definition homogen im Raum verteilt. Dieser Ansatz kann in der Simulation als eine Mittelwertbildung der räumlichen Verteilung gesehen werden. Bei der Raumklimaregelung werden heutzutage größtenteils EZM für die Regelung verwendet. Allerdings können hier erhebliche praktische Probleme auftreten, denn die Annahme homogener Luftverteilung ist in den seltensten Fällen korrekt [52]. Bezieht sich die Rückkopplung der Regelung, wie es in den meisten Fällen realisiert wird, lediglich auf einen Messwert, beispielsweise in der Raummitte, sind häufig unbefriedigende räumliche Schwankungen das Ergebnis [52]. Besonders im Bereich der Präventiven Konservierung, der den Rahmen dieser Arbeit bildet, ist dies inakzeptabel.

Charakterisiert werden EZM lediglich durch die Übertragungs- und Speichereigenschaften der objektumschließenden Hülle, dem anliegenden Außenklima sowie eventuellen zusätzlichen Quellen und Senken. Daher gilt für EZM für eine bestimmte Strömungsgröße die Annahme:

$$\rho c \frac{d\phi_{in}}{dt} = \sum J_{in} - \sum J_{out} \quad (3.2.1)$$

wobei die Ströme J_{in} und J_{out} dabei durch technische Quellen oder Senken und durch Ströme durch die Fassade verursacht werden können. Der Strom der durch zusätzliche technische Anlagen, sei es als Quelle oder als Senke, verursacht wird, ist im allgemeinen bekannt und kann so direkt in das Modell eingebunden werden. Die Ansätze zur Modellierung des Stroms, der durch die Differenz von Außen- und Innenklima verursacht wird, reicht von der Annahme eines Verzögerungsverhaltens erster Ordnung bis hin zur Modellierung der Bauteile über partielle Differentialgleichungen [30, 53]. EZM finden häufig Anwendung in hygrothermischen Gebäudesimulationen, beispielsweise zur Betrachtung der Energiebilanz eines Gebäudes. Zu nennende Simulationsprogramme sind hier WUFI [53, 54] und TrnSys [55]. Gilt es allerdings die räumliche Verteilung aufgrund deutlicher Gradienten der Strömungsgrößen zu berücksichtigen, reichen EZM leicht ersichtlich

nicht aus. Aus diesem Grund wurden die sogenannten „Zonalen Modelle“ entwickelt.

3.2.2 Zonale Modelle

Die Anfänge zonaler Modellierung von Gebäuden oder Räumen geht auf Lebrun [56, 8] im Jahr 1970 zurück. Zonale Modelle unterteilen ein betrachtetes Objekt in mehrere kleinere Objekte, häufig Kontroll-Volumen genannt. Die Anzahl solcher Kontroll-Volumen liegt normalerweise zwischen 10-100 [57]. Innerhalb der Kontroll-Volumen wird die Luft wiederum als perfekt durchmischt und somit homogen verteilt angesehen. Die Aufgabe zonaler Modelle besteht nun darin, den Luftaustausch zwischen den einzelnen Kontroll-Volumen sowie die Wechselwirkung mit externen Bedingungen wie dem Außenklima zu beschreiben. Das Resultat dieser Vorgehensweise ist, dass eine Aussage über die örtliche Verteilung der Luft getätigt werden kann, die im Gegensatz zu CFD-Simulationen aufgrund der deutlich reduzierten Anzahl an Knotenpunkten signifikant weniger Rechenleistung erfordert. Zur Beschreibung der Wechselwirkung der Kontroll-Volumen existieren zahlreiche Ansätze von denen hier im Folgenden die bekanntesten dargestellt werden.

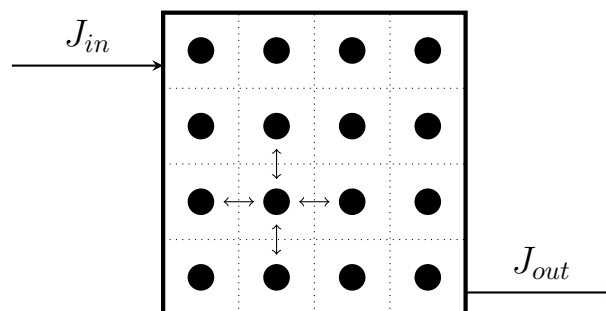


Abbildung 3.6: Schema eines Zonalen Modells

Potentialströmung

Für alle zonalen Modelle gilt zunächst die Annahme, dass die Massenerhaltung innerhalb der Kontroll-Volumen gelten muss:

$$\sum_j \dot{m}_{i,j} = 0 \quad (3.2.2)$$

Hierbei bezeichnet $\dot{m}_{i,j}$ den Massestrom zwischen dem betrachteten Kontroll-Volumen i und einem benachbarten Kontroll-Volumen j . Für die zonale Modellierung über Potentialströmungen gilt zudem die Annahme, dass Richtung und Betrag der resultierenden Massenströme gemäß des Gesetzes von Bernoulli einer Funktion des Drucks p und der Höhe h genügen:

$$\dot{m}_{i,j}(p_i, p_j) = -\rho \cdot A_F \cdot c_W \cdot \text{sign} \left(\frac{\Delta p_{i,j}}{\rho} + g\Delta h \right) \sqrt{2 \left| \left(\frac{\Delta p_{i,j}}{\rho} + g\Delta h \right) \right|} \quad (3.2.3)$$

Dabei ist A_F die Fläche, welche die Kontroll-Volumen i und j verbindet und c_W ein Widerstandswert der empirisch zu bestimmen ist. In [58] wird vorgeschlagen diesen Wert mit $c_W = 0,83$ zu wählen. Bei dieser Betrachtungsweise werden allerdings nur stationäre Zustände betrachtet, was eine Anwendung dieser zonalen Modelle für regelungstechnische Aufgaben nicht qualifiziert. Dennoch erfreuen sich solche zonalen Modelle in jüngster Vergangenheit großem Zuspruch. Trotz ihrer, verglichen mit CFD-Simulationen, geringen Komplexität geben sie Aufschluss über die stationäre Luftverteilung in Objekten. Zu nennende Arbeiten sind hier [7, 8, 57, 58, 6, 59].

Treibende Strömungen

In den bisher dargestellten zonalen Modellen wird die Strömungsgeschwindigkeit vernachlässigt. Dies führt dazu, dass die Modelle in Bereichen mit ausgeprägten realen Strömungen zu schlechten Ergebnissen führen [60], was insbesondere an Zonen, die an Heizungen, Fenster oder sonstigen Quellen oder Senken liegen der Fall ist. Daher wird in [61] vorgeschlagen, Zonen mit

ausgeprägten Luftströmungen getrennt von solchen mit niedrigen Luftgeschwindigkeiten zu betrachten. In Zonen mit niedrigen Luftgeschwindigkeiten soll weiter der bekannte zonale Ansatz gelten, wohingegen für die Zonen mit ausgeprägter Strömung Korrelationszahlen festgelegt werden, die den Anteil an „mitgerissener“ Luft aus benachbarten Zonen beschreiben sollen. Der große Nachteil dieser Methode ist die Bestimmung der Korrelationszahlen. Diese können nur für bestimmte Betriebsszenarien überhaupt ermittelt werden und ändern sich logischerweise, wenn sich das Betriebsszenario ändert. Betrachten wir beispielsweise die Luftströmung verursacht durch einen Heizkörper. Für einen festen Betriebszustand können solche Korrelationszahlen unter Umständen ermittelt werden, die allerdings nicht mehr gelten, wenn der Heizkörper beispielsweise ausgeschaltet wird. Für einen praktischen Einsatz, insbesondere bei regelungstechnischen Aufgaben, ist dieses Vorgehen somit ebenfalls nicht zielführend.

Impulsbetrachtung

In [62] wird ein Verfahren vorgestellt, dass sich zwischen der zuvor beschriebenen zonalen Modellierung und der CFD-Modellierung einordnen lässt. Dabei wird die Annahme getroffen, dass der durch Luftgeschwindigkeiten verursachte konvektive Strom im Allgemeinen deutlich geringer ist als der diffusive Fluss. Folglich wird dieser in den Modellgleichungen vernachlässigt, was zu den sogenannten Euler-Gleichungen führt. Sie stellen eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen dar. Gelöst werden diese auf einem ähnlich groben Gitter, wie die zonalen Modelle, was einen weiteren Unterschied zu CFD-Modellen ausmacht. Nichtsdestotrotz muss auch hier ein Satz von partiellen Differentialgleichungen gelöst werden.

Zonierung

Eine Frage die sich bei der zonalen Modellierung stellt ist, wie die Objekte in einzelne Kontroll-Volumen aufgeteilt werden sollen. Der übliche

und einfachste Weg ist dabei, eine äquidistante Gliederung in allen drei Dimensionen zu wählen (ähnlich Abbildung 3.6. Somit resultieren für jedes Kontroll-Volumen bis zu sechs benachbarte Volumen.

Eine weitere Möglichkeit der Zonierung wurde von [63] vorgeschlagen. Anhand von CFD-Simulationen wird ein „Alter“ der Luft ermittelt, welches leicht ersichtlich von der Intensität der Luftbewegung abhängt. Die Zonen werden gebildet, indem Luft gleichen „Alters“ zu einem Kontroll-Volumen zusammengefasst werden. Ein adaptives Verfahren zur Zonierung wird in [64] vorgeschlagen. Ebenfalls basierend auf CFD-Simulationen werden Gebiete unzureichender Genauigkeit dabei weiter unterteilt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die zonalen Modelle durchaus einen guten Beitrag zur räumlichen Klimabetrachtung liefern, jedoch gerade aus regelungstechnischer Sicht nicht die erstrebte Lösung darstellen. Gründe hierfür sind:

- stationäre Betrachtungsweise des Luftaustausches
- teilweise schwierige Modellierung für die wiederum CFD-Simulationen zur Parameterbestimmung notwendig sind
- Bestimmung von Korrelationszahlen für signifikante Luftbewegungen im praktischen Betrieb untauglich
- teilweise repräsentieren Vereinfachungen den tatsächlichen Sachverhalt nicht adäquat (z.B. Gesetz von Bernoulli)
- die in Abschnitt 3.1.3 erwähnten nichtlinearen Effekte werden nicht berücksichtigt.

Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit ein neues Verfahren vorgestellt, welches die Vorteile zentraler Modellierung, wie beispielsweise geringe Rechenzeiten, aufweist, zugleich aber auch die genannten Nachteile berücksichtigt. Dabei werden verschiedene Verfahren aus dem Bereich der

Regelungstechnik, der Computational Intelligence, der Fluidodynamik und der Systemtheorie miteinander kombiniert. Das resultierende Modell ist eine Erweiterung der Takagi-Sugeno (TS) Fuzzy Systeme, die für die Regelung nichtlinearer Prozesse bereits bekannt sind. Die Erweiterung bezieht sich dabei auf die örtlich verteilte Regelung nichtlinearer Prozesse. Zudem wird in den Abschnitten 4.4 und 6.3 ein Verfahren zur Systemidentifikation eingeführt, welches für einen praktischen Gebrauch im Rahmen der Klimaregelung in Gebäuden unerlässlich ist. Im Folgenden soll zunächst in die Theorie der TS Fuzzy Systeme eingeführt werden.

4 Modellstruktur der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme

Die Modellierung dynamischer Systeme ist eine zentrale Aufgabe in der modernen Regelungstechnik [65]. Modelle werden benötigt, um Prozesse zu analysieren, zu optimieren oder Regler zu entwerfen. Das Ergebnis theoretischer und mathematischer Modellbildung liegt dann meistens in Form von Differentialgleichungen vor, die den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und den Ausgangsgrößen beschreiben. Neben der Beschreibungsform solcher Ein-/Ausgangsmodelle werden dynamische Systeme auch häufig im Zustandsraum dargestellt [66, 67, 68]. Diese Art der Systembeschreibung wurde von R.E. Kalman eingeführt, und beschreibt nicht nur das Ein-/Ausgangsverhalten, sondern zusätzlich auch das Verhalten der internen Zustände des Systems. Dabei ist der Zustand eines Systems in [68] wie folgt definiert:

„Ein Vektor x wird Zustand eines Systems genannt, wenn für eine beliebige Zeit $t_e \geq 0$ die Elemente $x_i(0)$ von x zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ für $0 \leq t \leq t_e$ den Wert $x(t_e)$ und den Wert der Ausgangsgröße $y(t_e)$ eindeutig bestimmen. x heißt auch Zustandsvektor und die Komponenten $x_i(t)$ von x Zustandsvariable oder Zustandsgrößen.“

Der Zustand eines dynamischen Systems enthält also, in Kombination mit der Eingangsgröße, alle notwendigen dynamischen Informationen. Im Allgemeinen lässt sich ein Zustandsraummodell als ein Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung und Ausgabegleichungen wie folgt formulieren:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.0.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.0.1b)$$

Das Zustandsraummodell besteht aus n Zuständen, die im Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst werden, einem Eingangsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, einem Ausgangsvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, sowie den beschreibenden funktionalen Zusammenhängen $\mathbf{f}(\cdot)$ und $\mathbf{g}(\cdot)$, wobei die Zeitabhängigkeit der Zustands- und Eingangsgrößen im Folgenden aus Gründen der Leserbarkeit nicht angegeben wird. Bei den Funktionen $\mathbf{f}(\cdot)$ und $\mathbf{g}(\cdot)$ werden die Klasse der linearen und nichtlinearen Systeme unterschieden. Für die einfacher handhabbare Klasse der linearen Systeme gilt ein linearer Zusammenhang:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.0.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.0.2b)$$

Für solch eine lineare Systembeschreibung existiert in der Regelungstechnik eine geschlossene Systemtheorie [66]. Aus diesem Grund erfreut sich die lineare Systembeschreibung großer Beliebtheit. Allerdings bleibt festzustellen, dass nahezu alle real existierenden technischen Prozesse nichtlineares Verhalten aufweisen [66].

Generell lässt sich die lineare Systemtheorie nicht auf nichtlineare Systeme übertragen. Die Ausnahme bilden Systeme, die sich durch eine Approximation mit ausreichender Genauigkeit durch eine lineare Form beschreiben lassen [66, 68]. Hierzu wird ein Arbeitspunkt gewählt und das nichtlineare System um diesen Arbeitspunkt linearisiert. Dieses Vorgehen ist insbesondere bei Festwertregelungen einleuchtend, da sich der Prozess, sofern die Regelung funktioniert, in näherer Umgebung um den Arbeitspunkt bewegt. Bei Folgeregelungen kann es allerdings zu größeren Modellfehlern kommen, die das Ergebnis der Regelung negativ beeinflussen.

Beispielhaft ist in Abbildung 4.1 die Linearisierung einer Sinusfunktion dargestellt. Trigonometrische Funktionen treten häufig bei der Betrachtung

von nichtlinearen schwingungsfähigen Prozessen auf, wie der Stabilisierung eines inversen Pendels. Die Linearisierung in Abbildung 4.1 wurde um den Ursprung durchgeführt und ist nur für kleine Winkel um den Ursprung eine brauchbare Approximation.

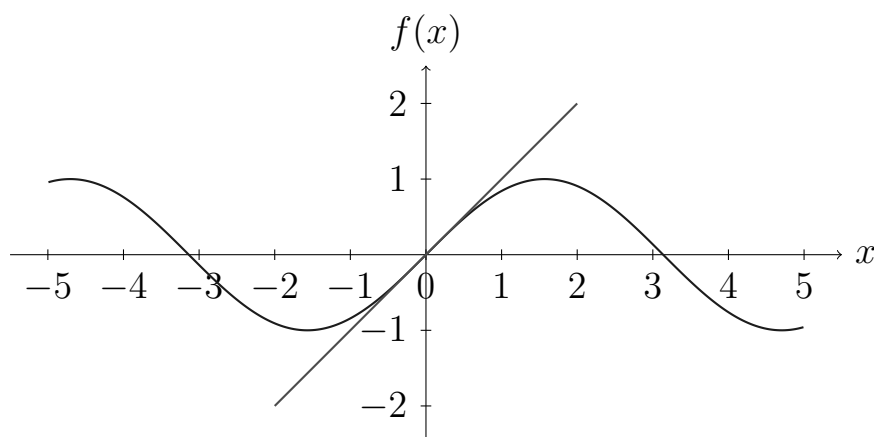
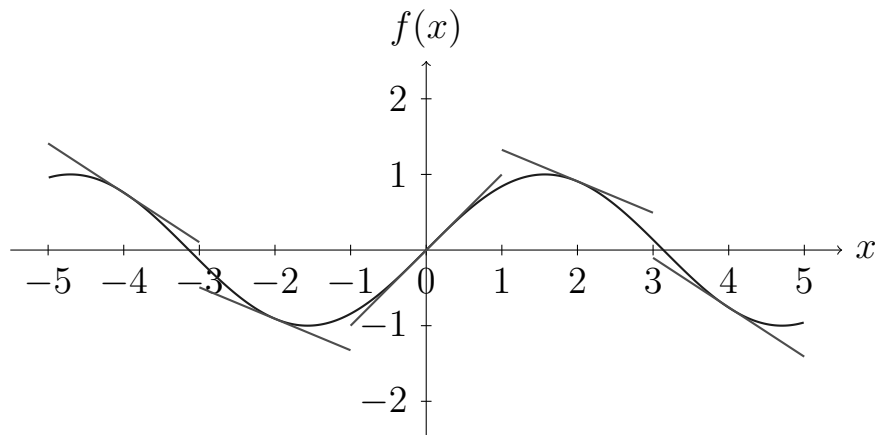
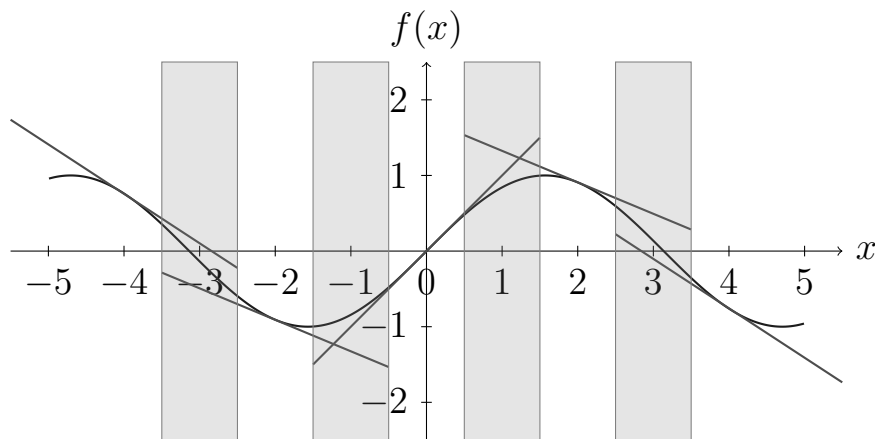


Abbildung 4.1: Linearisierung der Funktion $f(x) = \sin x$ im Ursprung

In näherer Umgebung zum Ursprung lässt sich daher die lineare Systemtheorie mit ausreichender Genauigkeit anwenden. Sofern es aber Ziel der Regelung ist, den Ursprung zu verlassen und das System in eine andere Ruhelage zu versetzen, ist das auf diese Weise linearisierte Modell unbrauchbar. Diese Tatsache motivierte zum Entwurf sogenannter „*Gain Scheduling*“ Verfahren [66, 69]. Hierbei wird das System an verschiedenen Arbeitspunkten linearisiert. Durch diese Vorgehensweise entstehen mehrere lineare Modelle an ausgewählten Arbeitspunkten. Für jedes lineare Modell lässt sich nun die lineare Systemtheorie anwenden. Beispielsweise lässt sich für jedes lineare Teilsystem ein Regler entwerfen. Jedes der einzelnen linearen Modelle hat dann einen gewissen „*Zuständigkeitsbereich*“ in dem es aktiv ist. Die Umschaltung zwischen den Systemen kann dabei auf verschiedene Arten erfolgen. Durch eine harte Umschaltung, wie sie in Abbildung 4.2 dargestellt ist, entstehen Sprünge an den Übergangsstellen.

Um die Sprungstellen zu vermeiden wird häufig zwischen den einzelnen Teilsystemen interpoliert [66], was in Abbildung 4.3 verdeutlicht werden soll. Bei dieser Vorgehensweise überlappen sich die Arbeitsbereiche der

Abbildung 4.2: Linearisierung der Funktion $f(x) = \sin x$ an mehreren ArbeitspunktenAbbildung 4.3: Linearisierung der Funktion $f(x) = \sin x$ mit überlappenden Arbeitsbereichen

einzelnen Teilmodelle. In den Schnittmengen in denen mehrere Teilmodelle aktiv sind, wird zwischen diesen interpoliert, sodass ein weicher Übergang stattfindet. Ausschlaggebend für die Umschaltung der Teilsysteme sind dabei sogenannte *Scheduling-Variablen*. Scheduling-Variablen können interne aber auch externe Systemgrößen sein. Im obigen Beispiel ist das Argument der Sinusfunktion x die Scheduling-Variable, also eine interne Größe.

Wie bereits erwähnt gibt es zahlreiche Möglichkeiten der Umschaltung zwischen den einzelnen Teilsystemen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz der Takagi-Sugeno (TS) Fuzzy Systeme verwendet. Hierbei handelt es sich um eine gewichtete Kombination der einzelnen linearen Teilmodelle.

Im Folgenden Abschnitt werden daher ausgewählte Grundlagen der Fuzzy-Theorie und der TS Fuzzy Systeme beschrieben

4.1 Einführung in die Fuzzy-Theorie

Die Theorie der TS Fuzzy Systeme wurde 1985 von T. Takagi und M. Sugeno entwickelt [70]. Es handelt sich dabei um die Kombination gewichteter linearer Teilmodelle. Die Gültigkeit der einzelnen Teilmodelle wurde dabei, wie in der Fuzzy-Theorie üblich, durch Wenn-Dann Regeln festgelegt. Der Anfang der Fuzzy-Theorie geht auf das Jahr 1965 zurück, als L. Zadeh seine Theorie über Fuzzy Sets [71] veröffentlichte. In der klassischen Mengenlehre ist ein Objekt α entweder Teil einer Menge A oder nicht. Die Menge A besitzt eine scharfe Abgrenzung. Definiert man $\mu(\alpha)$ als die Zugehörigkeit oder den Zugehörigkeitsgrad, so gilt in der klassischen Mengenlehre demnach (siehe auch Abbildung 4.4):

$$\mu(\alpha) \in \{0, 1\} \quad (4.1.1)$$

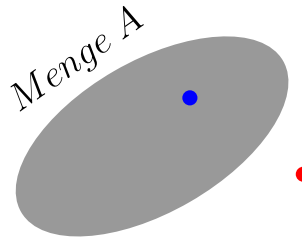


Abbildung 4.4: Klassische Zugehörigkeit eines Objektes zu einer Menge A (blau) und Ausschluss aus der Menge A (rot)

Im Gegensatz zu dieser Festlegung des Mengenbegriffs definierte Zadeh, dass die Zugehörigkeit von Objekten zu Mengen nicht nur die Werte *Wahr* und *Falsch* oder 0 und 1 annehmen können, sondern den kompletten Zahlenraum zwischen 0 und 1:

$$0 \leq \mu(\alpha) \leq 1 \quad , \quad \mu(\alpha) \in \mathbb{R} \quad (4.1.2)$$

Ein Objekt kann somit zu einer Fuzzy-Menge A gehören und gleichzeitig auch von ihr ausgeschlossen sein (vgl. Abbildung 4.5). Dies war die zentrale Neuerung in der von Zadeh eingeführten Fuzzy Logik.

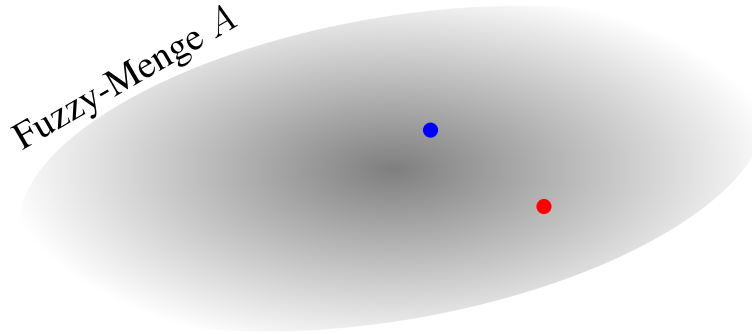


Abbildung 4.5: Zugehörigkeit der Objekte zu einer Fuzzy-Menge A

Mit Hilfe der obigen Logik-Definition ist unscharfes Wissen (engl. fuzzy) deutlich besser beschreibbar, was ein wesentlicher Grund für den Erfolg der Fuzzy-Theorie war. Häufig lassen sich Eigenschaften nicht scharf voneinander abgrenzen [72]. Als Beispiel sei hier die Gruppe der alten Menschen genannt. Sicherlich gibt es zweifellos eine Teilmenge die zur Gruppe der alten Menschen zählt, sowie es auch eine Teilmenge gibt die zur Gruppe der jungen Menschen zählt. Es existiert allerdings auch ein Bereich dazwischen, der nicht explizit einer Altersgruppe zugeordnet werden kann. Dennoch muss in der klassischen Mengenlehre eine klare Grenze definiert werden. Beispielsweise könnte für die Unterteilung zwischen jungen und alten Menschen aus der Menge A aller Menschen, beziehungsweise besser aller möglichen Alterszahlen, in der klassischen Mengenlehre gelten:

$$M_{jung} = \{\alpha \in A | \alpha \leq 50\} \quad M_{alt} = A \setminus M_{jung} \quad (4.1.3)$$

Somit ist definiert, dass jeder Mensch entweder zur Gruppe der jungen Menschen M_{jung} oder der alten Menschen M_{alt} gehört. Auch der Übergang ist strikt. Diese Definition entspricht nicht unserem intuitiven Denken, was Zadeh zur Entwicklung der Fuzzy-Theorie motivierte. Die Fuzzy-Theorie ist

angelehnt an menschliche Schlussfolgerung, die im Allgemeinen Kompromisse darstellen können. Den Kern bilden sogenannte *linguistische Variablen*, die die betrachteten Merkmale darstellen. Im obigen Beispiel ist das Alter die linguistische Variable. Da hier, wie die Namensgebung „linguistisch“ bereits andeutet, mit qualitativen sprachlichen Ausdrücken gearbeitet wird, ist diese Formulierung dem menschlichen Denken deutlich näher. Für eine linguistische Variable sind linguistische Terme formuliert [73, 74]. Linguistische Terme sind zunächst qualitative Merkmalswerte, die linguistische Variablen annehmen können. In Analogie zum obigen Beispiel sind *jung* und *alt* linguistische Terme der linguistischen Variable *Alter*. Soweit ist, bis auf die Namensgebung kein Unterschied zur klassischen Logik erkennbar. Der Unterschied liegt in der Zuordnung zu den Mengen beziehungsweise linguistischen Termen. Die harte Zuteilung, wie sie in Gleichung (4.1.3) beschrieben ist, wird in der Fuzzy-Theorie aufgebrochen und durch Fuzzy-Mengen oder Fuzzy Sets ersetzt. Dabei wird jedem Element α eine Zugehörigkeit oder Gültigkeit $\mu_{\widetilde{M}_i}(\alpha)$ zur Fuzzy-Menge \widetilde{M}_i zugeordnet. Eine Fuzzy-Menge \widetilde{M}_i lässt sich somit als Menge von Wertepaaren verknüpft mit ihrem jeweiligen Zugehörigkeitsgrad oder Gültigkeitsgrad zur Menge definieren [73]:

$$\widetilde{M}_i := \{(\alpha, \mu_{\widetilde{M}_i}(\alpha)) | \alpha \in A\} \quad (4.1.4)$$

Dabei ist $\mu_{M_i}(\alpha)$ im eigentlichen Sinne die Zugehörigkeitsfunktion. Der Zugehörigkeitsgrad ist somit eher eine Auswertung der Zugehörigkeitsfunktion für ein konkretes Element α . Abbildung 4.6 zeigt eine scharfe und eine mögliche Fuzzy-Interpretation der Begriffe *jung* und *alt*.

Es zeigt sich daher in Abbildung 4.6, dass die Beschreibung mit Hilfe einer Zugehörigkeitsfunktion zur Fuzzy-Menge \widetilde{M}_{alt} weitaus intuitiver für das menschliche Denken ist. Dennoch stellt sich auch in der Fuzzy-Theorie die Frage, wie die Mengenzugehörigkeit zu definieren ist, also welche Form die Zugehörigkeitsfunktionen annehmen sollen. Häufig wird hierzu Expertenwissen zu Hilfe genommen. Expertenwissen liegt meist linguistisch oder lexikalisch vor, dass heißt es wird beispielsweise durch Befragungen gewon-

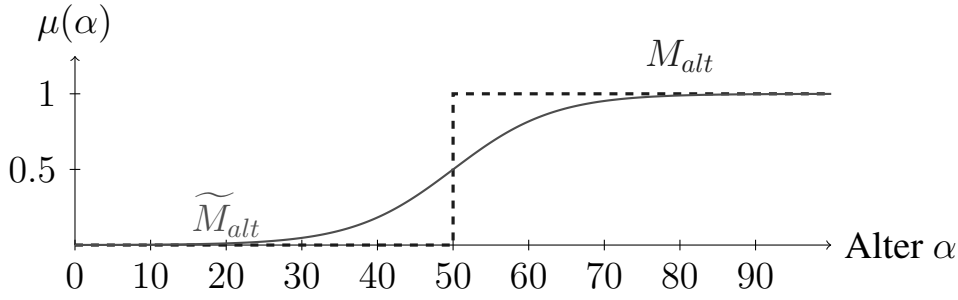


Abbildung 4.6: Graphische Abbildung der Fuzzy Menge \widetilde{M}_{alt} und der klassischen Menge M_{alt}

nen und ist daher meist subjektiv. So werden bei mehreren Befragungen unterschiedliche Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{alt}(\alpha)$ resultieren. Eine wichtige Aufgabe in der Fuzzy-Theorie ist es, das linguistische Expertenwissen in einer mathematischen Form abzubilden. Die Abbildung erfolgt, wie bereits erwähnt, über die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\widetilde{M}_i}(\alpha)$. Hierfür stehen mehrere Funktionstypen zur Verfügung, von denen im Folgenden die am häufigsten verwendeten aufgeführt sind.

Die gebräuchlichsten Zugehörigkeitsfunktionen können durch wenige Parameter charakterisiert werden. Für die trapezförmige Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{trapez}(\alpha)$ werden vier Parameter benötigt die im Parametervektor $\underline{S} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4]$ zusammengefasst werden. Mit diesen Parametern folgt für die trapezförmige Zugehörigkeitsfunktion:

$$\mu_{trapez}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \leq S_1 \\ (\alpha - S_1)/(S_2 - S_1) & \text{für } S_1 < \alpha < S_2 \\ 1 & \text{für } S_2 \leq \alpha \leq S_3 \\ (S_4 - \alpha)/(S_4 - S_3) & \text{für } S_3 < \alpha < S_4 \\ 0 & \text{für } \alpha \geq S_4 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Mit Hilfe der trapezförmigen Definition einer Zugehörigkeitsfunktion lassen sich weitere Formen ableiten [75], die in Abbildung 4.7 dargestellt sind.

Im Normalfall werden Zugehörigkeitsfunktionen in einem Bereich von null bis eins definiert, was allerdings keine zwingende Eigenschaft ist [73]. Sofern

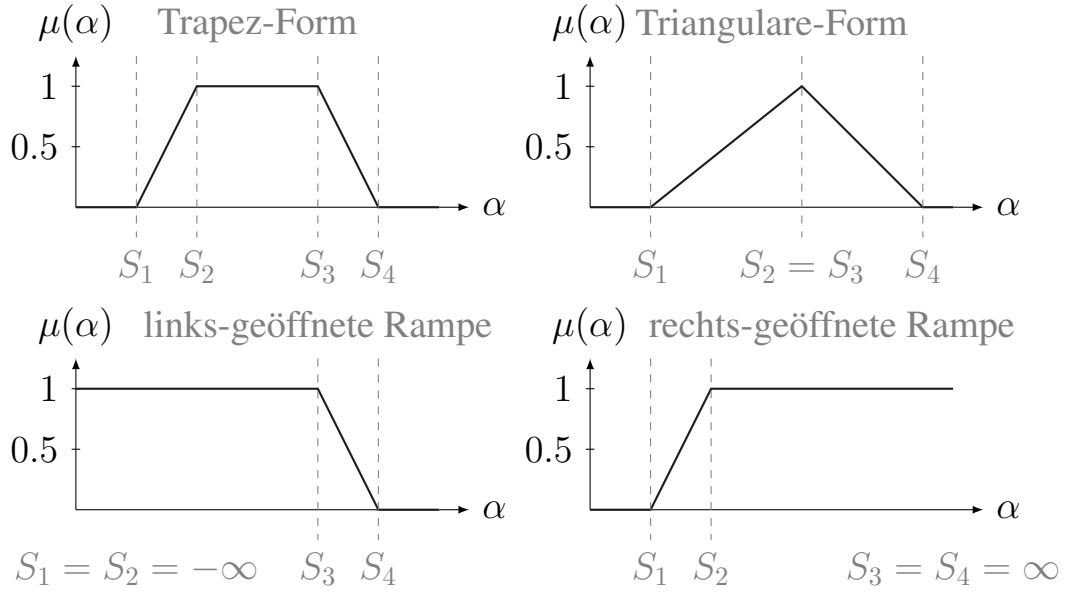


Abbildung 4.7: Zugehörigkeitsfunktionen abgeleitet aus der parametrischen Trapez-Form

diese Eigenschaft allerdings erfüllt ist, wird die Fuzzy-Menge als *normal* bezeichnet. Es gilt daher für normale Fuzzy Mengen \widetilde{M}_i :

$$\sup_{\alpha} \mu_{\widetilde{M}_i}(\alpha) = 1 \quad (4.1.6)$$

Da man allerdings alle Fuzzy-Mengen leicht durch Division der Zugehörigkeitsfunktion durch das Supremum normieren kann, werden im Folgenden nur normierte Fuzzy-Mengen betrachtet.

Eine weitere wichtige Klasse von Zugehörigkeitsfunktionen bilden die stetigen Funktionen. Als Beispiele sind hier die Gaussfunktion und die Sigmoidfunktion genannt. Auch hier sind einfache Parameterdefinitionen notwendig, um die Form der Zugehörigkeitsfunktionen konkret zu definieren:

$$\mu_{Gauss}(\alpha) = \exp\left(-\frac{(\alpha - \zeta)^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.1.7)$$

Dabei lässt sich über σ die Breite der Zugehörigkeitsfunktion und über ν das Zentrum bestimmen. Für die Sigmoidfunktion gilt:

$$\mu_{Sigmoid}(\alpha) = \frac{1}{1 + \exp[\pm \sigma \cdot (\alpha - \zeta)]} \quad (4.1.8)$$

Dabei stellt $+\sigma$ die linksseitig-geöffnete Sigmoidfunktion und $-\sigma$ die rechtsseitig-geöffnete Sigmoidfunktion dar. Des Weiteren wird über den Parameter σ die Steigung im Wendepunkt definiert (siehe Abbildung 4.8).

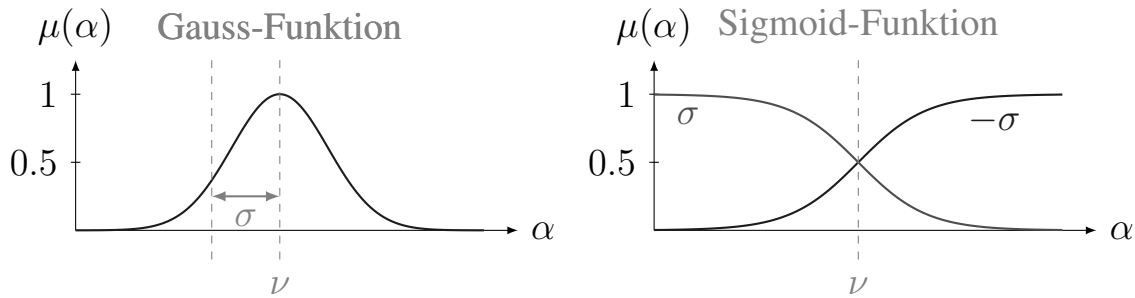


Abbildung 4.8: Beispiele für stetige Zugehörigkeitsfunktionen

Die Übersetzung von der linguistischen Ausdrucksweise in Fuzzy-Mengen durch die Definition von Zugehörigkeitsfunktionen wird auch als „Fuzzyfizierung“ bezeichnet. Wie bei einem klassischen System wird auch ein Fuzzy System durch einen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen beschrieben. Für die Fuzzyfizierung der Ausgangsgrößen wird mit den Singletons häufig noch eine weitere Form der Zugehörigkeitsfunktion verwendet.

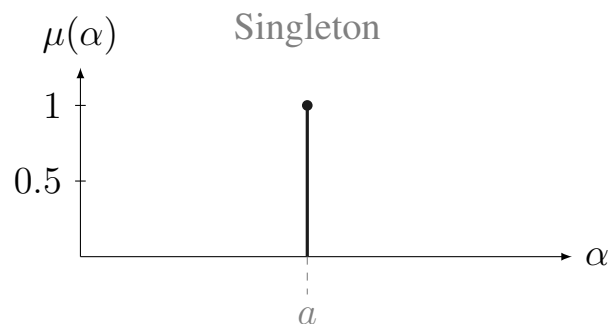


Abbildung 4.9: Singleton-Zugehörigkeitsfunktion

Singeltons weisen lediglich an einer Stelle im Arbeitsraum den Wert eins auf und sind sonst stetig null:

$$\mu_{\text{Singleton}}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Neben der parametrischen Definition der Zugehörigkeitsfunktion lassen sich auch weitere Eigenschaften zur näheren Beschreibung definieren. Alle Bereiche des fuzzifizierten Arbeitsraumes \tilde{G} , an dem die Zugehörigkeitsfunktion einer Fuzzy-Menge \tilde{M}_i von null verschieden ist, wird als „Support $\tilde{S}(\tilde{M}_i)$ “ der Fuzzy-Menge bezeichnet.

$$\tilde{S}(\tilde{M}_i) = \{\alpha \in \tilde{G} | \mu_{\tilde{M}_i}(\alpha) \neq 0\} \quad (4.1.10)$$

Dabei beschreibt der Begriff Arbeitsraum den kompletten verfügbaren Wertebereich des Systems. Als Kern $\tilde{C}(\tilde{M}_i)$ einer Fuzzy-Menge ist der Bereich definiert, an dem die Zugehörigkeitsfunktion den Wert eins annimmt, sofern die Fuzzy-Menge normal ist.

$$\tilde{C}(\tilde{M}_i) = \{\alpha \in \tilde{G} | \mu_{\tilde{M}_i}(\alpha) = 1\} \quad (4.1.11)$$

Bilden Support und Kern sehr kleine Gebiete oder gar einen diskreten Wert, wie es bei Singletons der Fall ist, ist der Grad der Unschärfe relativ gering. Je größer der Support und der Kern sind, desto unschärfer ist eine Aussage. Bei Verwendung der Gauss-Zugehörigkeitsfunktion ist der Support über den kompletten Arbeitsraum gegeben, der Kern allerdings nur an einer diskreten Stelle definiert. Für trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen ist die Einteilung dagegen offensichtlich. Abbildung 4.10 zeigt am Beispiel der trapezförmigen Zugehörigkeitsfunktion die zuvor genannten Eigenschaften. Im Rahmen dieser Arbeit werden zudem lediglich konvexe Zugehörigkeitsfunktionen betrachtet. Die Konvexität einer Fuzzy-Menge ist dadurch definiert, dass für jedes beliebige Intervall $[\alpha_1; \alpha_2]$ die Zugehörigkeitsgrade an den Grenzen α_1 und α_2 stets die höchsten Werte im gesamten Intervall darstellen. Demnach muss für eine konvexe Fuzzy-Menge \tilde{M}_{konvex} gelten:

$$\mu_{\tilde{M}_{konvex}}((1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2) \geq \min\left(\mu_{\tilde{M}_{konvex}}(\alpha_1), \mu_{\tilde{M}_{konvex}}(\alpha_2)\right) \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad (4.1.12)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft im Rahmen dieser Arbeit ist die „Orthogonalität“ von Zugehörigkeitsfunktionen. Zugehörigkeitsfunktionen werden

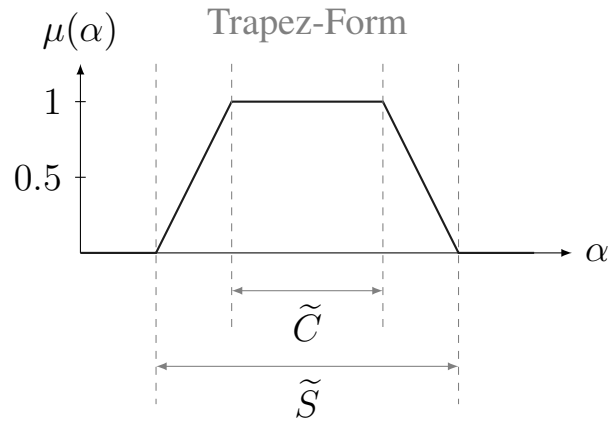


Abbildung 4.10: Eigenschaften von Zugehörigkeitsfunktionen

als „*orthogonal*“ bezeichnet, wenn sich für jedes Objekt α des Arbeitsraums alle Zugehörigkeitsgrade der einzelnen N_F Fuzzy-Mengen stets zu eins addieren. Es muss daher im gesamten Arbeitsraum \tilde{G} gelten:

$$\sum_{i=1}^{N_F} \mu_i(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \tilde{G} \quad (4.1.13)$$

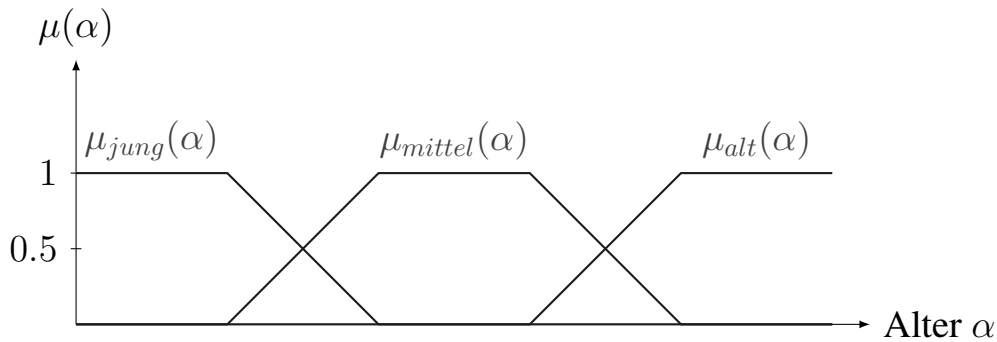


Abbildung 4.11: Beispielhafte orthogonale Fuzzyfizierung der linguistischen Variable Alter

Eine der wichtigsten Aufgaben bei der klassischen Anwendung der Fuzzy-Theorie ist die beschriebene Fuzzyfizierung des Arbeitsraumes. Häufig wird durch subjektives Expertenwissen die Anzahl und Form der Zugehörigkeitsfunktionen festgelegt [76]. Eine wissenschaftlichere Herangehensweise findet sich im Bereich der datengetriebenen Modellbildung [73, 77, 78]. Dieser Themenkomplex wird in Abschnitt 4.4 näher betrachtet.

Neben der Fuzzyfizierung linguistischer Variablen gehört zu einem Fuzzy System auch die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangsgrößen. Dabei kann die Verknüpfung auf mehrere Arten erfolgen. Die bekanntesten Methoden sind Mamdani Fuzzy Systeme und Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme [73, 74]. Wird Allgemein von Fuzzy Systemen gesprochen, sind meist Mamdani Fuzzy Systeme gemeint. Da die Mamdani Fuzzy Systeme den Ursprung der Fuzzy Systeme darstellen, wird im Folgenden die Theorie dieser Systeme erläutert. Dies dient auch dazu, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu den Takagi-Sugeno Fuzzy Systemen zu verdeutlichen.

Bei den Mamdani Fuzzy Systemen werden den unscharf formulierten Eingangsgrößen auch unscharf formulierte Ausgangsgrößen zugeordnet. Die Verknüpfung erfolgt dabei lexikalisch durch WENN-DANN-Regeln. Mit diesen Regeln kann das Expertenwissen abgebildet werden. Für die Beschreibung einer raumluftechnischen Anlage könnte beispielsweise folgende Regel R_i formuliert werden:

R_i : **WENN** Temperatur = mittel **UND** Aussentemperatur = hoch
DANN stark kühlen

Die entscheidende Eigenschaft eines Mamdani Fuzzy Systems ist im Konklusionsteil zu finden. Als Konklusion wird die Schlussfolgerung, also in diesem Fall *stark kühlen* bezeichnet. Bei Mamdani Fuzzy Systemen sind die Konklusionen ebenfalls unscharf formuliert, d.h. *stark kühlen* ist eine Fuzzy-Menge mit einer bestimmten Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\text{stark kühlen}}$.

Im WENN-Teil sind die sogenannten *Prämissen* zu finden. Die Prämissen bestimmen den Grad der Aktivierung einer Regel R_i . Bei der Prämissenbildung werden die Zugehörigkeitsgrade für konkrete scharfe Werte berechnet, was in Abbildung 4.12 für das obige Beispiel der raumluftechnischen Anlage beispielhaft dargestellt ist. Dabei wurden die Zugehörigkeitsfunktionen, die in der obigen Regel aktiv sind blau dargestellt und für feste Werte der Innentemperatur θ_{in} und der Aussentemperatur θ_{out} ausgewertet.

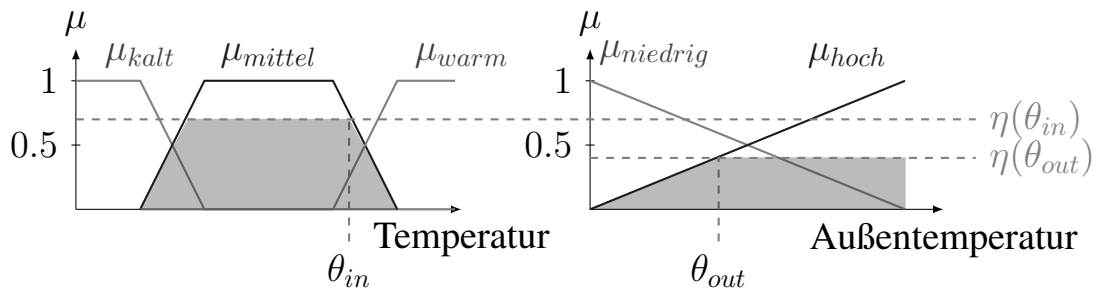


Abbildung 4.12: Regelauswertung am Beispiel für das Beispiel einer raumluftechnischen Anlage

Durch die Auswertung im Rahmen der Prämissenbildung erhält man die einzelnen Zugehörigkeitsgrade $\mu_{mittel}(\theta_{in})$ und $\mu_{hoch}(\theta_{out})$ der scharfen Werte θ_{in} und θ_{out} zu den in der Regel aktiven Fuzzy-Mengen *mittel* und *hoch*.

Bei der Auswertung der Regeln R_i werden alle beteiligten Fuzzy-Mengen mit ihren jeweiligen Zugehörigkeitsgraden zu einem Erfülltheitsgrad der Regel η_{R_i} zusammengefasst. Dieser Schritt wird Aggregation genannt. Bei Mamdani Fuzzy Systemen stehen hierfür einige Operatoren zur Verfügung, wie der MIN-Operator oder der MAX-Operator. Häufig werden für konjunktive Verknüpfungen (UND-Verknüpfungen) der MIN-Operator und für disjunktive Verknüpfungen (ODER-Verknüpfungen) der MAX-Operator verwendet [79], wobei auch andere Operatoren in der Literatur zum Einsatz kommen (siehe [71, 72, 73, 74, 79]). Für obige beispielhaft aufgeführte Regel gilt bei Verwendung des MIN-Operators bei konjunktiver Verknüpfung der Wert $\eta_{R_i} = \min(\mu_{mittel}(\theta_{in}), \mu_{hoch}(\theta_{out})) = \mu_{hoch}(\theta_{out})$ als Erfülltheitsgrad η_{R_i} der Regel R_i .

Nach dem beschriebenen Schritt der Aggregation aller Regeln erfolgt die Ermittlung der Aktivierung der Ausgangsfunktionen. Wie bereits erwähnt besteht der Konklusionsteil bei Mamdani Fuzzy Systemen ebenfalls aus Zugehörigkeitsfunktionen. Im Falle des obigen Beispiels mögen die ausgangsseitigen Zugehörigkeitsfunktionen wie in Abbildung 4.13 definiert sein. Bei der Aktivierung stehen ebenfalls mehrere Operatoren zur Verfügung. Die am häufigsten verwendeten sind der MIN- und der PRODUKT-Operator [79]. Bei Verwendung des MIN-Operators werden die ausgangsseitigen Zugehö-

rigkeitsfunktionen durch den Erfülltheitsgrad der Regel η_{R_i} quasi nach oben beschränkt (siehe Abbildung 4.13). Beim PRODUKT-Operator werden alle Werte der Zugehörigkeitsfunktion mit dem Erfülltheitsgrad η_{R_i} multipliziert. Das Resultat ist in beiden Fällen eine individuelle geometrische Form (blau in Abbildung 4.13) der aktivierten ausgangsseitigen Zugehörigkeitsfunktion.

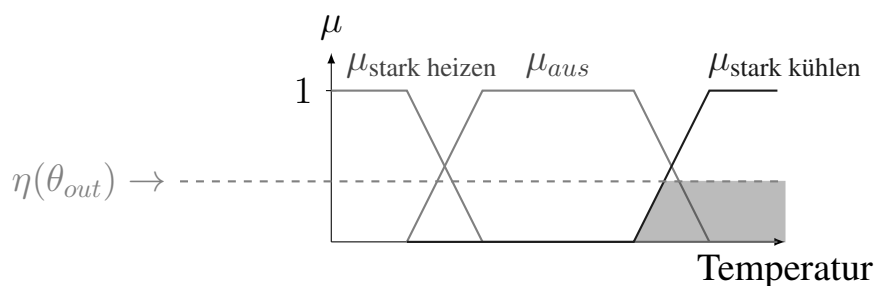


Abbildung 4.13: Aktivierte Ausgangsseitige Zugehörigkeitsfunktion für ein Fuzzy System einer raumluftechnischen Anlage bei Verwendung des MIN-Operators

Die Aktivierung der ausgangsseitigen Zugehörigkeitsfunktionen wird ebenfalls für alle Regeln vorgenommen. Somit entstehen ebenso viele geometrische Formen der aktivierten Ausgangsfunktionen wie Regeln vorhanden sind. Im nächsten Schritt der Akkumulation werden diese Formen zu einer gemeinsamen Form durch den MAX-Operator oder den PRODUKT-Operator zusammengefasst. Bei Verwendung des MAX-Operators wird eine geometrische Form als Verknüpfung aller Formen gebildet. Der PRODUKT-Operator bildet die geometrische Form durch Multiplikation aller Formen. Die Schritte der Aggregation oder Prämissenbildung, der Aktivierung und der Akkumulation bilden den Mechanismus der *Inferenz*.

Auf die Inferenz folgt im letzten Schritt die Defuzzifizierung. Im Falle der Mamdani Fuzzy Systeme besteht die Aufgabe der Defuzzifizierung nun darin, aus einer geometrischen Form einen scharfen Ausgangswert y^* zu ermitteln. Dies geschieht in den meisten Fällen durch die „*Center of Gravity (COG)*“-Methode [79]. Hierbei wird der geometrische Schwerpunkt des

$$y^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{inf}(y)ydy}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{inf}(y)dy} \quad (4.1.14)$$

Im Allgemeinen lässt sich ein Fuzzy System, sowohl das bisher beschriebene Mamdani Fuzzy System als auch die später behandelten Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme, in chronologischer Reihenfolge durch die

- vollständig beschreiben. Abbildung 4.14 zeigt zudem exemplarisch alle Schritte eines Mamdani Fuzzy Systems für das Beispiel der raumluftech-nischen Anlagen mit einer Regelbasis von $N_R = 3$ Regeln. Dabei lauten die drei Regeln:

R_3 : WENN Temperatur = kalt UND Aussentemperatur=niedrig
DANN stark heizen

Zwar eignen die Mamdani Fuzzy Systeme sehr gut, um Expertenwissen in eine regelungstechnisch nutzbare Beschreibungsform zu überführen, allerdings erfordert gerade der Schritt der Defuzzifizierung einen hohen Rechenaufwand. Des Weiteren handelt es sich bei den Mamdani Fuzzy Systemen um ein statisches Kennfeld, sodass dynamische Systeme nicht beschrieben werden können, was die Einsatzmöglichkeiten erheblich einschränkt.

Im Gegensatz zu den klassischen Mamdani Fuzzy Systemen, lassen sich bei den TS Fuzzy Systemen auch dynamische Systeme beschreiben, weshalb die TS Fuzzy Systeme gerade im Bereich der nichtlinearen Regelungstechnik häufig zum Einsatz kommen. Für tiefergehende Informationen zu Mamdani Fuzzy Systemen sei daher auf [71, 72, 73, 74, 79]) verwiesen, da sie im Folgenden nicht weiter Gegenstand dieser Arbeit sind.

4.2 Aufbau der TS Fuzzy Systeme

Eingeführt wurde die Theorie der TS Fuzzy Systeme im Jahr 1985 [70]. Der wesentliche Unterschied der TS Fuzzy Systeme zu den bis dahin bekannten Mamdani Fuzzy Systemen liegt wie bereits erwähnt im Konklusionsteil. Hier werden keine Zugehörigkeitsfunktionen eingesetzt um die Ausgangsgrößen zu fuzzyfizieren, sondern es wird ein funktionaler Zusammenhang gegeben. Solch ein TS Fuzzy System setzt sich aus Regeln R_i folgender Struktur zusammen:

$$R_i : \text{ WENN } \alpha_1 = \widetilde{M}_{1,i} \text{ UND ... UND } \alpha_n = \widetilde{M}_{n,i} \text{ DANN } y_i = f_i(\alpha) \quad (4.2.1)$$

In seiner ursprünglichen Form, wie sie von Takagi und Sugeno vorgeschlagen wurde, handelt es sich auch bei den TS Fuzzy Systemen um ein statisches Kennfeld. Für die Funktionen $f_i(\alpha)$ im Konklusionsteil der Regeln R_i können beliebige lineare oder nichtlineare Funktionen eingesetzt werden. Der Vorteil dieser Methode liegt in der Defuzzifizierung. Da für jede Regel R_i nun direkt ein scharfer Ausgangswert y_i folgt, wird die Defuzzifizierung erheblich vereinfacht, was auch ein Grund für den beliebten Einsatz von TS

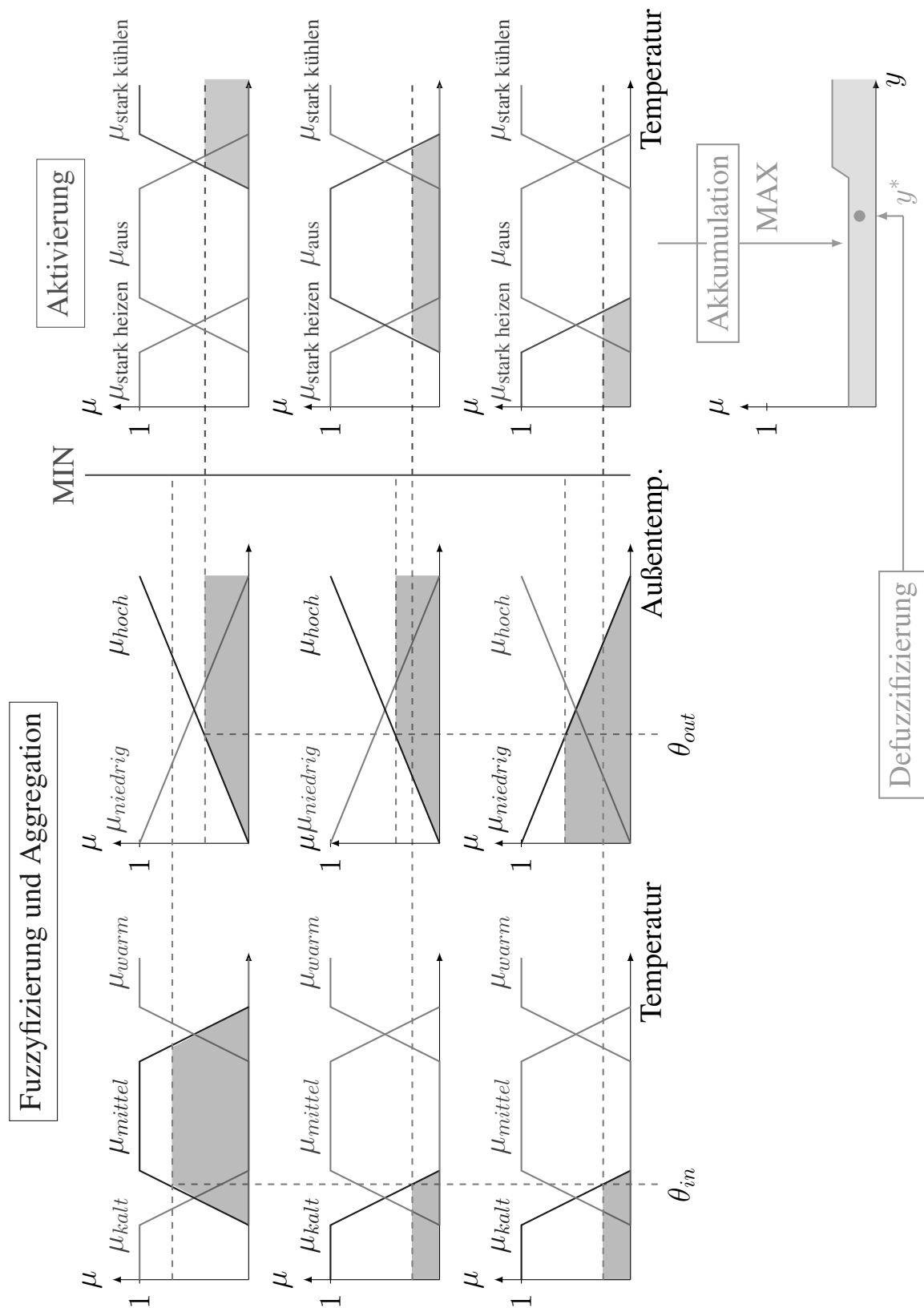


Abbildung 4.14: Beispielhafter Aufbau eines Mamdani Fuzzy Systems

Fuzzy Systemen darstellt [73]. Muss bei den Mamdani Fuzzy Systemen noch eine geometrische Auswertung über Schwerpunktmethoden oder ähnliches erfolgen, lassen sich die einzelnen Regeln bei TS Fuzzy Systemen leicht zu einem Gesamtausgang akkumulieren beziehungsweise defuzzifizieren:

$$y(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\boldsymbol{\alpha}) \cdot y_i(\boldsymbol{\alpha})}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\boldsymbol{\alpha})} \quad (4.2.2)$$

Den Erfülltheitsgrad $\eta_i(\boldsymbol{\alpha})$ der N_R Regeln erhält man analog zur Aggregation bei den Mamdani Fuzzy Systemen. Hierzu wird bei TS Fuzzy Systemen meist der PRODUKT-Operator eingesetzt. Für den Erfülltheitsgrad $\eta_i(\boldsymbol{\alpha})$ einer Regel erhält man demnach durch Multiplikation aller beteiligten Zugehörigkeitsgrade:

$$\eta_i(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_j \mu_{j,i}(\alpha_j) \quad (4.2.3)$$

Bislang wurden die Zugehörigkeitsfunktionen für jede linguistische Variable α_i separat formuliert (vgl. Abbildung 4.12). Ist ein Fuzzy System komplett formuliert, d.h. neben den Zugehörigkeitsfunktionen ist auch die Regelbasis festgelegt, lässt sich der Erfülltheitsgrad $\eta_i(\boldsymbol{\alpha})$ der einzelnen Regeln R_i als Kennfeld im aufgespannten Raum darstellen. Für ein TS Fuzzy System soll beispielhaft die folgende Regelbasis gelten:

$$\begin{aligned} R_1 : \text{ WENN } \alpha_1 = \widetilde{M}_{1,1} \quad \text{ UND } \alpha_2 = \widetilde{M}_{2,1} \\ \quad \text{ DANN } y_1 = -10\alpha_1 + 10\alpha_2 - 5 \\ R_2 : \text{ WENN } \alpha_1 = \widetilde{M}_{1,1} \quad \text{ UND } \alpha_2 = \widetilde{M}_{2,2} \\ \quad \text{ DANN } y_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 - 4 \\ R_3 : \text{ WENN } \alpha_1 = \widetilde{M}_{1,2} \quad \text{ DANN } y_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Zudem sollen die Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy-Mengen $\widetilde{M}_{n,i}$ definiert sein, wie in Abbildung 4.15 dargestellt.

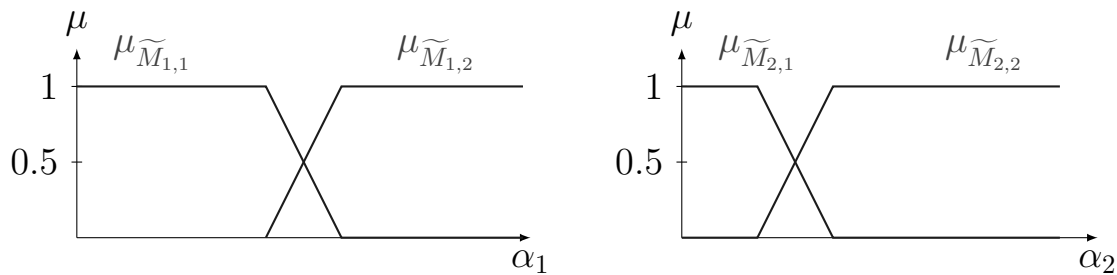


Abbildung 4.15: Beispielhafte orthogonale Fuzzyfizierung

Dann gilt für den Erfülltheitsgrad $\eta(\alpha)$ das resultierende Kennfeld aus Abbildung 4.16. Zudem ist das Übertragungsverhalten $y(\alpha)$ des statischen TS Fuzzy Systems rechts dargestellt.

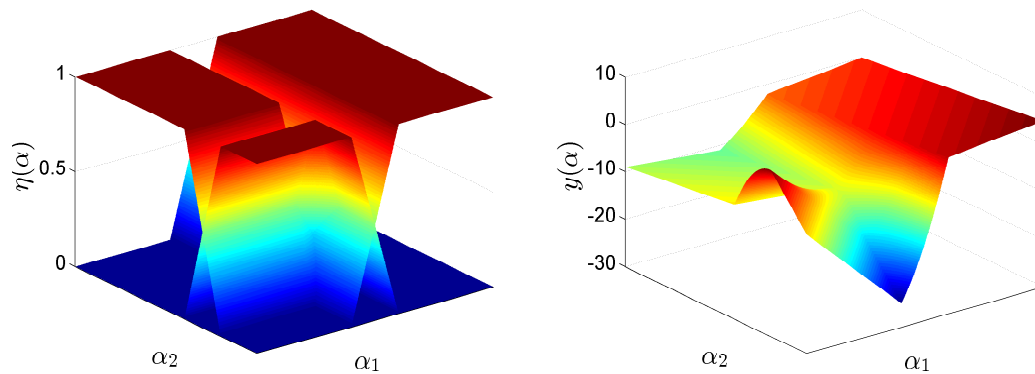


Abbildung 4.16: Resultierendes Kennfeld für den Erfülltheitsgrad (links) und das Übertragungsverhalten des TS Fuzzy Systems (rechts)

Es lässt sich deutlich erkennen, dass durch ein Fuzzy System leicht ein nichtlineares Übertragungsverhalten erreicht werden kann, obwohl es sich im obigen Beispiel lediglich um eine gewichtete Kombination aus linearen Funktionen handelt. Das obige Beispiel zeigt zudem einen Sonderfall der TS Fuzzy Systeme. Die Zugehörigkeitsfunktionen aus Abbildung 4.15 erfüllen die Orthogonalitätsbedingung. Folglich gilt diese auch für den Erfülltheitsgrad aus Abbildung 4.16. Im Allgemeinen ist dies allerdings nicht zwingend der Fall. Speziell bei der Verwendung anderer Arten von Zugehörigkeitsfunktionen, wie der Gaussfunktion, ist dies nicht der Fall. Aus diesem Grund ist die Normierung aus (4.2.2) erforderlich. Durch die Normierung wird die

sogenannte *Fuzzy-Basisfunktion* $\Psi(\alpha)$ gebildet:

$$\Psi(\alpha) = \frac{\eta_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\alpha)} \quad \sum_{i=1}^{N_R} \Psi(\alpha) = 1 \quad (4.2.5)$$

Somit folgt für das TS Fuzzy System:

$$y(\alpha) = \sum_{i=1}^{N_R} \Psi(\alpha) \cdot y_i(\alpha) \quad (4.2.6)$$

Für den Sonderfall aus obigem Beispiel gilt schlussendlich $\Psi(\alpha) = \eta(\alpha)$, was wie bereits erwähnt im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dies soll im Folgenden verdeutlicht werden. Dazu werden die Zugehörigkeitsfunktionen des obigen Beispiels neu gewählt. Die Regelbasis und die Konklusionen bleiben erhalten. Für die neuen Zugehörigkeitsfunktionen gilt nachfolgend Abbildung 4.17.

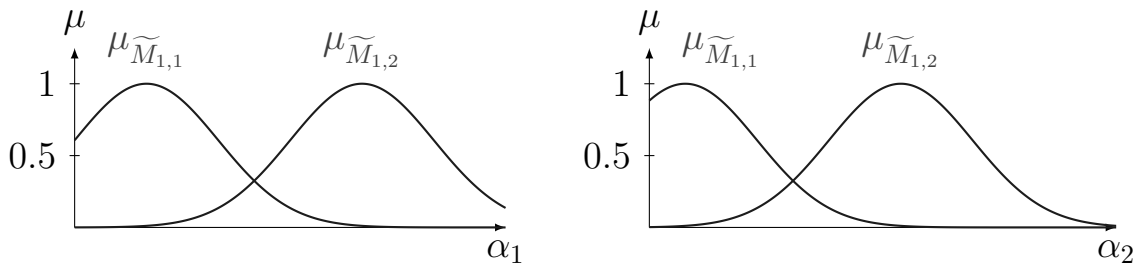


Abbildung 4.17: Beispielhafte orthogonale Fuzzyfizierung

Bereits in Abbildung 4.17 ist zu erkennen, dass die Orthogonalitätsbedingung nicht erfüllt ist. Somit ist die Fuzzy-Basisfunktion $\Psi(\alpha)$ in diesem Fall auch von den Erfülltheitsgraden $\eta(\alpha)$ verschieden, wie Abbildung 4.18 zeigt. Bislang wurden die Fuzzy Systeme, sowohl in Mamdani- als auch TS-Form, als statische Kennfelder beschrieben. Mit Hilfe solcher Fuzzy Systeme lassen sich nichtlineare statische Funktionen approximieren (siehe Abschnitt 4.4). Seit der Einführung und der wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit TS Fuzzy Systemen werden diese heute auch vermehrt eingesetzt, um dynamische Systeme zu modellieren [78, 80, 81, 82]. Hierzu werden die statischen

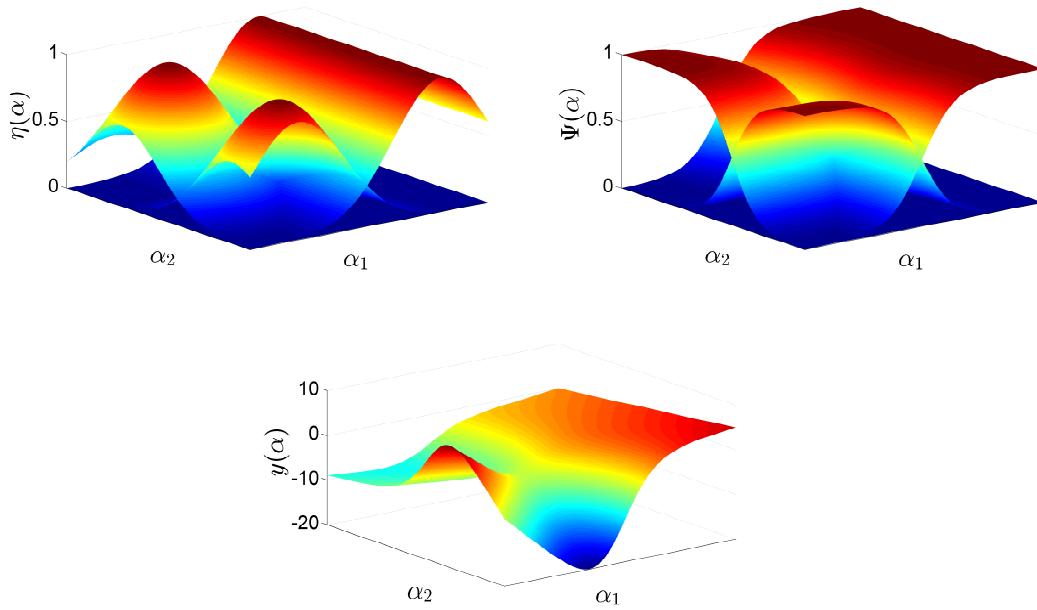


Abbildung 4.18: Resultierendes Kennfeld für den Erfülltheitsgrad $\eta(\alpha)$ (oben links), die Fuzzy-Basisfunktion $\Psi(\alpha)$ (oben rechts) und das Übertragungsverhalten des TS Fuzzy Systems (unten)

Funktionen des Konklusionsteils durch dynamische Systeme ersetzt. Die dynamischen Systeme sind dabei von linearer Form, was zahlreiche Vorteile mit sich bringt, wie später gezeigt wird. Durch entsprechende Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen lassen sich dennoch auch nichtlineare dynamische Systeme darstellen.

$$\begin{aligned}
 R_i : \text{ WENN } z_1 = \widetilde{M}_{1,i} \text{ UND ... UND } z_n = \widetilde{M}_{n,i} \\
 \text{ DANN } \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \\
 y_i(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + c_i
 \end{aligned}
 \tag{4.2.7}$$

Entscheidend für die Auswertung der Prämissen sind nunmehr sogenannte Scheduling-Variablen z_j die in einem Scheduling-Vektor z zusammengefasst werden. Scheduling-Variablen sind in den meisten Fällen Zustände oder Ausgangsgrößen des betrachteten Systems. Als Scheduling-Variablen werden, sofern bekannt, Größen gewählt, die nichtlineares Systemverhalten bewirken, um dieses durch die Zugehörigkeitsfunktionen abbilden zu können. Allerdings können auch externe Größen in den Scheduling-Vektor aufgenommen

werden. Für den Fall, dass keine Informationen über nichtlineare Einflüsse vorliegen, stehen Nichtlinearitätstests oder Systemidentifikationmethoden zur Verfügung [83], was in Kapitel 6 näher beschrieben wird.

Genau wie bei dem statischen TS Fuzzy System aus Gleichung (4.2.1) werden die Zugehörigkeitsgrade zum Erfülltheitsgrad einer Regel zusammengefasst. Der UND-Operator in den Prämissen wird dabei auch hier als PRODUKT-Operator mit Hilfe des algebraischen Produkts ausgeführt. Zudem sind die Fuzzy-Basisfunktionen $\Psi(\mathbf{z})$ als Normierung definiert:

$$\eta_i(\mathbf{z}) = \prod_j \mu_{j,i}(z_j) \quad \Psi_i(\mathbf{z}) = \frac{\eta_i(\mathbf{z})}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z})} \quad (4.2.8)$$

Somit folgt für ein dynamisches TS Fuzzy System zunächst:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{c}_i]}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z})} \\ &= \sum_{i=1}^{N_R} \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{c}_i] \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Gleichung (4.2.9) beschreibt die Ausgangsgleichung des Zustandsmodells als TS Fuzzy Modell in Form von gewichteten linearen Zustandsmodellen. Für ein dynamisches TS Fuzzy System muss zudem die Zustandsgleichung in TS Fuzzy Form formuliert werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{a}_i]}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z})} \\ &= \sum_{i=1}^{N_R} \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{a}_i] \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

In Kombination bilden Gleichung (4.2.9) und (4.2.10) ein dynamisches TS Fuzzy System. Die Vektoren \mathbf{a}_i und \mathbf{c}_i bestehen aus konstanten Termen. TS Fuzzy Systeme werden häufig zur approximativen Modellierung nichtlinearer Systeme eingesetzt [65]. Bei Linearisierungen außerhalb von Gleichgewichtslagen entstehen dabei konstante Offset-Terme die bei den TS Fuzzy Systemen dann in den affinen Termen \mathbf{a}_i und \mathbf{c}_i zusammengefasst werden (siehe hierzu auch Abschnitt 4.3.2). Dynamische nichtlineare Systeme können mit Hilfe von dynamischen TS Fuzzy Systemen auf verschiedene Arten entweder exakt oder approximativ modelliert werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

4.3 Modellbildung durch TS Fuzzy Systeme

TS Fuzzy Systeme stellen universelle Approximatoren dar [84], d.h. beliebige kontinuierliche Funktionen können bis zu beliebiger Genauigkeit approximiert werden. Abbildung 4.19 zeigt drei generelle Verfahren, wie ein TS Fuzzy System entworfen werden kann. Die Verfahren werden im Folgenden beschrieben und in Kapitel 5 angewendet.

Generell lässt sich bei dem TS Fuzzy Entwurf zwischen exakter und approximativer Modellierung unterscheiden. Durch den Ansatz der Sektor-Nichtlinearitäten werden nichtlineare Funktionen *exakt* abgebildet. Es besteht folglich mathematische Äquivalenz zwischen dem TS Fuzzy System und dem nichtlinearen System. Da dynamische Systeme das Thema dieser Arbeit darstellen, liegt der Fokus im weiteren Verlauf der Arbeit auf dynamischen TS Fuzzy Systemen. Nichtsdestotrotz ist die Übertragbarkeit auf statische Systeme gegeben und leicht ersichtlich.

4.3.1 Ableitung von TS Fuzzy Systemen aus Modellgleichungen

Die Entwicklung von TS Fuzzy Systemen direkt aus den Modellgleichungen mit Hilfe des Ansatzes der Sektor-Nichtlinearitäten ist der am häufigsten genutzte Weg [85]. Mit dem Ansatz der Sektor-Nichtlinearitäten lässt sich ein

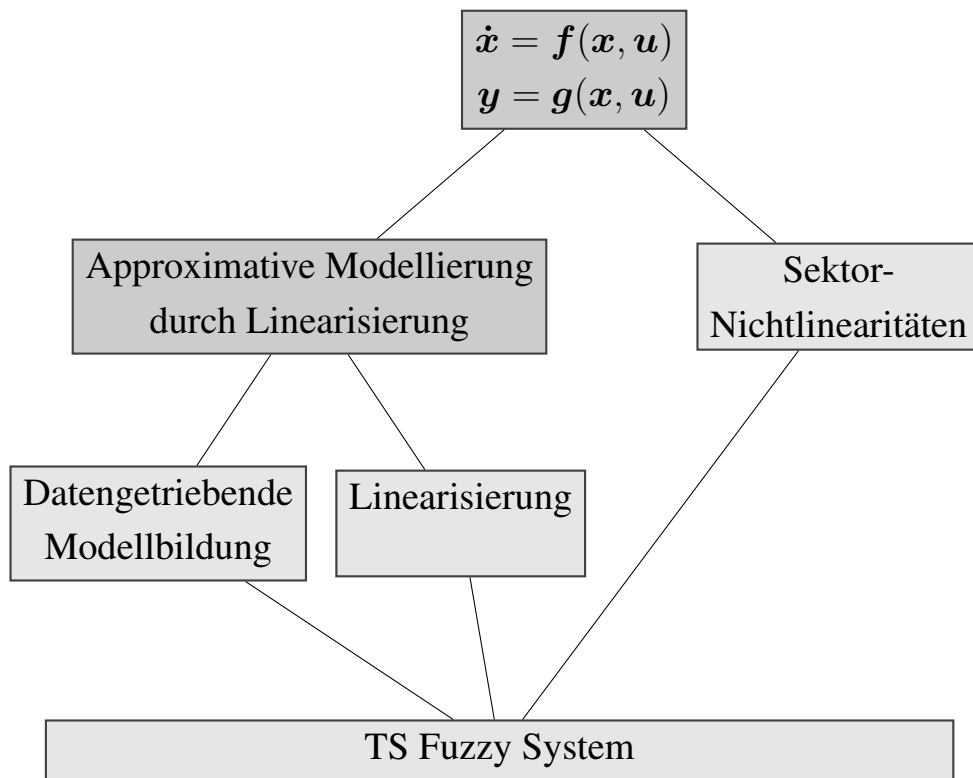


Abbildung 4.19: Übersicht der Verfahren zum Entwurf von TS Fuzzy Systemen

dynamisches nichtlineares System in einer kompakten Menge exakt repräsentieren [86]. Dabei bedeutet die Forderung nach einer kompakten Menge, dass die Vektorfunktionen $f(x, u)$ und $g(x, u)$ sowie die Zustände des nichtlinearen Zustandsraummodells nach Gleichung (4.0.1) begrenzt sind. Dies ist im Allgemeinen keine strenge Forderung, da Größen in physikalischen Systemen immer eine Begrenzung aufweisen. Bei solchen begrenzten Systemen ist es immer möglich, in einem definierten Bereich, also einer kompakten Menge des Arbeitsraumes, einen Sektor zu finden, der die Funktion einschließt. Es muss daher gelten:

$$\dot{x} = f(x, u) \in [a_1; a_2] \cdot x \quad (4.3.1)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst Funktionen betrachtet, die lediglich von einer Variablen x abhängen. Eine einfache graphische Interpretation des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatzes liefert Abbildung 4.20 für eine nichtlineare Funk-

tion mit nur einer Variablen. Das Konzept lässt sich problemlos auf höherdimensionale Probleme übertragen, ist dann allerdings graphisch nicht mehr ohne weiteres darstellbar.

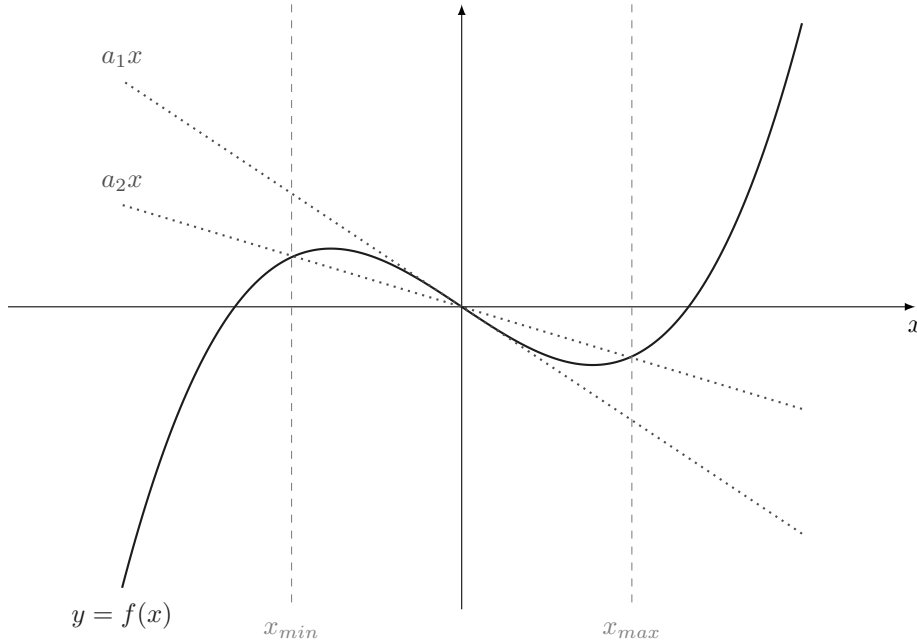


Abbildung 4.20: Lokaler Sektor einer nichtlinearen Funktion

Innerhalb des Sektors, der von x_{min} und x_{max} begrenzt wird, lässt sich jede beliebige Funktion als gewichtete Summe der beiden linearen Funktionen a_1x und a_2x ausdrücken. Es lässt sich leicht zeigen, dass gilt:

$$y = f(x) = \mu_1(x)a_1x + \mu_2(x)a_2x = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)a_ix \quad (4.3.2)$$

Die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_1(x)$ und $\mu_2(x)$ sind dabei wie folgt festgelegt:

$$\mu_1(x) = \frac{f(x) - a_2x}{(a_1 - a_2)x} \quad \mu_2(x) = \frac{a_1x - f(x)}{(a_1 - a_2)x} = 1 - \mu_1(x) \quad (4.3.3)$$

Die Äquivalenz in Gleichung (4.3.2) lässt sich nun ebenfalls für nichtlineare dynamische Systeme nutzen. Dabei werden alle Terme, die nichtlinear in das Systemverhalten eingehen durch Gleichung (4.3.2) ersetzt und als

gewichtete Summe zweier linearer Funktionen dargestellt. Wird dieses Vorgehen für alle nichtlinearen Terme durchgeführt, erhält man ein TS Fuzzy System des nichtlinearen Prozesses. Es ist ebenso leicht ersichtlich, dass der Scheduling Vektor z sich in diesem Fall aus allen Variablen zusammensetzt, die nichtlinear in die Systemgleichungen eingehen. Der Ansatz der Sektor-Nichtlinearitäten wird im Folgenden am klassischen Beispiel eines nichtlinearen Zweitank-Systems gezeigt und in Kapitel 5 auf örtlich verteilte Systeme erweitert. Abbildung 4.21 zeigt schematisch ein Zwei-Tank System für das ein TS Fuzzy System nach dem Ansatz der Sektor-Nichtlinearitäten entworfen werden soll.

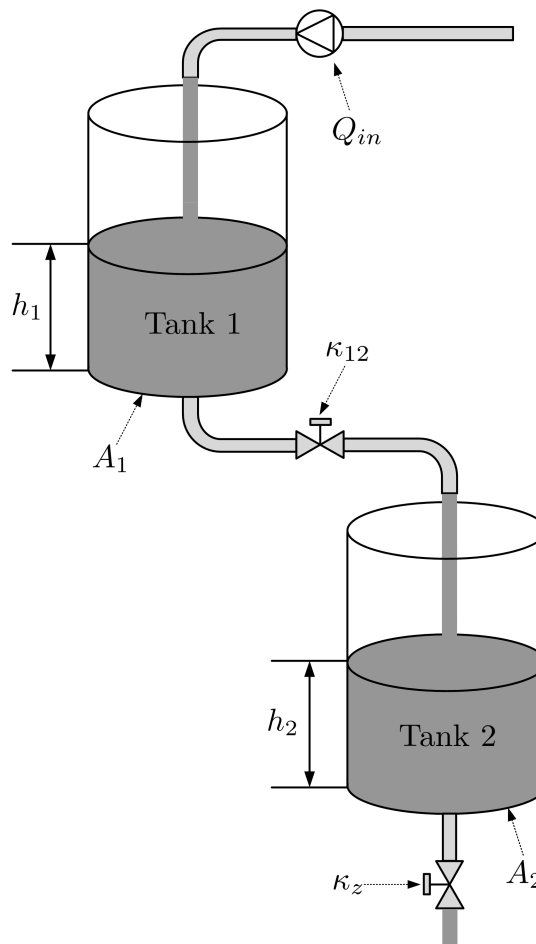


Abbildung 4.21: Exemplarischer Aufbau eines Zweitank-Systems

Das nichtlineare Zustandsraummodell lässt sich über die Bilanzierung der Füllstände der Tanks aufstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{Q_{in}-Q_{12}}{A_1} \\ \frac{Q_{12}-Q_z}{A_2} \end{bmatrix} \\ \text{mit } \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T \quad u = Q_{in} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Für Volumenströme gilt im Allgemeinen $Q_{ij} = A_{ij} \cdot v_{ij}$ mit dem Öffnungsquerschnitt der Ventile A_{ij} und der Flussgeschwindigkeit v_{ij} . Für die Flussgeschwindigkeit gilt nach dem Gesetz von Toricelli $v_{ij} = a_{v,ij} \cdot \sqrt{2gh_i}$ mit dem Verlustbeiwert $a_{v,ij}$. Somit gilt für die Volumenströme $Q_{ij} = \kappa_{ij} \cdot \sqrt{2gh_i}$, wobei $\kappa_{ij} = A_{ij} \cdot a_{v,ij}$ den Öffnungsquerschnitt und den Verlustbeiwert zu einer Konstante zusammenfasst. Letztlich lautet das nichtlineare Zustandsraummodell für das Zwei-Tank System vollständig:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \sqrt{2gx_1} + \frac{1}{A_1} u \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \sqrt{2gx_1} - \frac{\kappa_z}{A_2} \sqrt{2gx_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Im nichtlinearen Zustandsraummodell treten zwei unterschiedliche nichtlineare Terme auf ($\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$). Die betreffenden Variablen sind in diesem Fall die Zustände x_1 und x_2 . Folglich ist der Scheduling-Vektor durch $\mathbf{z} = [x_1 \ x_2]^T$ bestimmt. Um den Ansatz der Sektor-Nichtlinearitäten anwenden zu können, muss das nichtlineare Zustandsraummodell standardisiert werden. Die Standardisierung ist dabei einfach durch Division möglich:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \frac{\sqrt{2gx_1}}{x_1} & 0 \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \frac{\sqrt{2gx_1}}{x_1} & -\frac{\kappa_z}{A_2} \frac{\sqrt{2gx_2}}{x_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Im vorliegenden Beispiel ist lediglich die Systemmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ mit nichtlinearen Termen besetzt. Im Allgemeinen können allerdings alle beschreibenden

Matrizen nichtlineare Terme aufweisen. Auf einer kompakten Menge, dass heißt in einem beschränkten Wertebereich der Zustände x_1 und x_2 , lassen sich nun mit Hilfe der Sektor-Nichtlinearitäten die nichtlinearen Terme repräsentieren durch:

$$\begin{aligned}\Lambda^1(x_1) &= \frac{\sqrt{2gx_1}}{x_1} = \mu_{1,1}(x_1) \cdot \Lambda_{max}^1 + \mu_{1,2}(x_1) \cdot \Lambda_{min}^1 \\ \Lambda^2(x_2) &= \frac{\sqrt{2gx_2}}{x_2} = \mu_{2,1}(x_2) \cdot \Lambda_{max}^2 + \mu_{2,2}(x_2) \cdot \Lambda_{min}^2\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

Dabei bezeichnen Λ_{min}^i und Λ_{max}^i die Extrema innerhalb der Sektoren. Die Existenz der Extrema ist bei jeder differenzierbaren Funktion in einem kompakten Sektor immer erfüllt. Für die Zugehörigkeitsfunktionen folgt hierfür:

$$\mu_{i,1}(z_i) = \frac{\Lambda^i(z_i) - \Lambda_{min}^i}{\Lambda_{max}^i - \Lambda_{min}^i} \quad \mu_{i,2}(z_i) = \frac{\Lambda_{max}^i - \Lambda^i(z_i)}{\Lambda_{max}^i - \Lambda_{min}^i} = 1 - \mu_{i,1}(z_i)\quad (4.3.8)$$

Im Fall der Sektor-Nichtlinearitäten wird somit jeder nichtlineare Term Λ^i in zwei lineare Terme aufgeteilt. Die linearen Terme werden über die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{i,1}$ und $\mu_{i,2}$ gewichtet und addiert. Um das Gesamtsystem aus Gleichung (4.3.2) oder allgemein aus Gleichung (4.3.1) zu erhalten, wird eine vollständige Regelbasis verwendet. Das bedeutet, dass die Zugehörigkeitsfunktionen aller nichtlinearen Terme vollständig miteinander kombiniert werden. Somit resultieren beim TS Fuzzy Entwurf über Sektor-Nichtlinearitäten $N_R = 2^p$ Regeln, wobei p die Anzahl der nichtlinearen Terme darstellt. Im Beispiel des Zwei-Tank Systems sind dies demnach $N_R = 2^2 = 4$ Regeln. In der linguistischen Ausdrucksweise lässt sich das gegebene Zwei-Tank System also exakt repräsentieren durch folgende vier Regeln:

$$\begin{aligned}
R_1 : \quad & \text{WENN } z_1 = x_1 = \mu_{1,1}(z_1) \text{ UND } z_2 = x_2 = \mu_{2,1}(z_2) \\
& \text{DANN } \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\
& \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t) \\
R_2 : \quad & \text{WENN } z_1 = x_1 = \mu_{1,2}(z_1) \text{ UND } z_2 = x_2 = \mu_{2,1}(z_2) \\
& \text{DANN } \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\
& \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t) \\
R_3 : \quad & \text{WENN } z_1 = x_1 = \mu_{1,1}(z_1) \text{ UND } z_2 = x_2 = \mu_{2,2}(z_2) \\
& \text{DANN } \dot{\mathbf{x}}_3(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(t) \\
& \mathbf{y}_3(t) = \mathbf{C}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_3 \mathbf{u}(t) \\
R_4 : \quad & \text{WENN } z_1 = x_1 = \mu_{1,2}(z_1) \text{ UND } z_2 = x_2 = \mu_{2,2}(z_2) \\
& \text{DANN } \dot{\mathbf{x}}_4(t) = \mathbf{A}_4 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_4 \mathbf{u}(t) \\
& \mathbf{y}_4(t) = \mathbf{C}_4 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_4 \mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Die Erfülltheitsgrade der Regeln lassen sich wie bereits erwähnt auch hier über den PRODUKT-Operator durch Multiplikation der in einer Regel vorkommenden Zugehörigkeitsgrade ermitteln:

$$\begin{aligned}
\eta_1(\mathbf{z}) &= \mu_{1,1}(z_1) \cdot \mu_{2,1}(z_2) \\
\eta_2(\mathbf{z}) &= \mu_{1,2}(z_1) \cdot \mu_{2,1}(z_2) \\
\eta_3(\mathbf{z}) &= \mu_{1,1}(z_1) \cdot \mu_{2,2}(z_2) \\
\eta_4(\mathbf{z}) &= \mu_{1,2}(z_1) \cdot \mu_{2,2}(z_2)
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Eine Normierung der Zugehörigkeitsfunktionen, wie sie zu Beginn des Abschnitts beschrieben wurde, ist im Fall des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatzes nicht notwendig. Durch die Definition der Zugehörigkeitsfunktionen sind diese in jedem Fall bereits normiert. Abbildung 4.22 zeigt die Zugehörigkeitsfunktionen und die resultierenden Kennfelder für die einzelnen η_i Regeln. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Nichtlinearität aufgrund der Wurzelfunktion nun in den Gewichtsfunktionen zu finden ist.

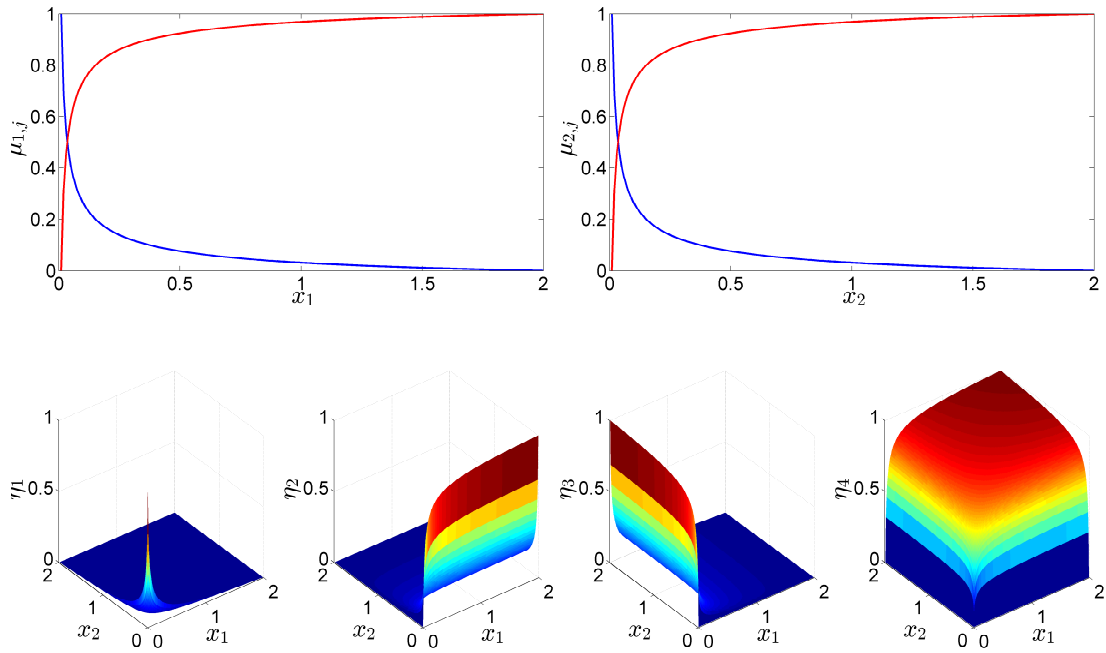


Abbildung 4.22: Sektor-Funktionen und resultierende Regel-Kennfelder

Für die Matrizen A_i , B_i , C_i und D_i gilt:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \Lambda_{min}^1 & 0 \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \Lambda_{min}^1 & \frac{\kappa_z}{A_2} \Lambda_{min}^2 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \Lambda_{max}^1 & 0 \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \Lambda_{max}^1 & \frac{\kappa_z}{A_2} \Lambda_{min}^2 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \Lambda_{min}^1 & 0 \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \Lambda_{min}^1 & \frac{\kappa_z}{A_2} \Lambda_{max}^2 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa_{12}}{A_1} \Lambda_{max}^1 & 0 \\ \frac{\kappa_{12}}{A_2} \Lambda_{max}^1 & \frac{\kappa_z}{A_2} \Lambda_{max}^2 \end{bmatrix} \\
 B_1 = B_2 = B_3 = B_4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} & & \\
 C_1 = C_2 = C_3 = C_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\
 D_1 = D_2 = D_3 = D_4 &= 0 & &
 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Das vollständige TS Fuzzy System als exakte Repräsentation des Zwei-Tank Systems ist demnach vollständig definiert mit Hilfe obiger Zugehörigkeitsfunktionen und Matrizen:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^4 \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u] = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u] \\
\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^4 \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i u] = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i u]
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Es bleibt festzuhalten, dass bei dieser Entwicklung von TS Fuzzy Systemen keine affinen Terme entstehen, sofern das nichtlineare Zustandsraummodell nicht selbst affine Terme aufweist. Da das TS Fuzzy System aus Gleichung (4.3.12) eine exakte Darstellung des Modells aus Gleichung (4.3.6) darstellt, weist es auch die selben Eigenschaften bezüglich Stabilität, Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit, Identifikation, etc. auf. Hier liegt der große Vorteil der TS Fuzzy Systeme, da nun die lineare Systemtheorie auf die linearen Teilmodelle angewendet werden kann. Für die Systemidentifikation wird dies in Abschnitt 4.4 und für den Reglerentwurf in Abschnitt 4.5 gezeigt.

4.3.2 Approximative Modellbildung durch Linearisierung

Eine weitere Möglichkeit, Systeme in TS Fuzzy Form darzustellen, stellt die approximative Modellierung dar. Wie der Name bereits ankündigt, wird dabei ein Modell generiert, was nur eine Näherung des tatsächlichen Systems darstellt. Allerdings weisen TS Fuzzy Systeme die Eigenschaft der universellen Approximation auf [84], d.h. das approximierte Modell lässt sich bis zu beliebiger Modellgüte verfeinern. Zunächst soll aber das Prinzip der approximativen Modellierung dargestellt werden. Es können dabei zwei Vorgehensweisen unterschieden werden:

- Linearisierung des nichtlinearen Systems an verschiedenen Arbeitspunkten und Definition der Zugehörigkeitsfunktionen als Gültigkeitsfunktionen der linearen Systeme zu einem definierten Arbeitsbereich
- Datengetriebene Modellbildung durch Methoden der Systemidentifikation

Die datengetriebene Modellbildung umfasst Methoden der linearen Optimierung zur Bestimmung der Modellparameter, d.h. der Matrizen A_i , B_i , C_i und D_i , Methoden der nichtlinearen Optimierung zur Definition der Zugehörigkeitsfunktionen und Strukturidentifikationsverfahren zur Bestimmung der Modellordnung. Die datengetriebene Modellbildung wird im Rahmen dieser Arbeit unter dem Begriff Systemidentifikation zusammengefasst und in Abschnitt 4.4 behandelt. Die hybride Modellierung umfasst ebenfalls Methoden der Systemidentifikation zur Bestimmung der Modellparameter, gibt die Zugehörigkeitsfunktionen allerdings vor. Dies kann beispielsweise genutzt werden, wenn durch Clusteringverfahren einzelne Arbeitsbereiche zu linearen Teilsystemen zusammengefasst werden können [87, 88]. Diese Art der Modellbildung wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet.

Bei der approximativen Modellbildung durch Linearisierung wird das nicht-lineare System an festgelegten Arbeitspunkten linearisiert. Die Gültigkeit der einzelnen entstanden linearen Teilmodelle wird über die Zugehörigkeitsfunktionen festgelegt. Die einfachste Wahl für die Zugehörigkeitsfunktionen ist, diese in Form eines Schachbrettmusters im Arbeitsraum zu verteilen. Man spricht auch von einem regulären Gitter. Wie später gezeigt wird, ist diese Vorgehensweise zwar die einfachste, führt aber eventuell zu schlechten Modellierungseigenschaften.

Zunächst müssen bei der approximativen Modellierung durch Linearisierung die Arbeitspunkte festgelegt werden. Idealerweise werden die Arbeitspunkte im Kern der Zugehörigkeitsfunktionen platziert, d.h. an Stellen, an denen das Modell die Gültigkeit eins aufweist. Ein nichtlineares dynamisches System wird, wie allgemein üblich, durch eine Taylorreihenentwicklung und Abbruch nach dem ersten Glied um einen Arbeitspunkt $\zeta = (x_0, u_0)$ wie folgt linearisiert [68]:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \\
&\quad \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{r}_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\
\mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \\
&\quad \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{r}_g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0)
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Die Restglieder der Taylorreihen setzen sich aus den höheren Ableitungen zusammen und sind im Allgemeinen deutlich kleiner als die ersten Summanden. Aus diesem Grund werden die Restglieder meist vernachlässigt. Die partiellen Ableitungen nach \mathbf{x} und \mathbf{u} liefern folgende Jacobimatrizen:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \mathbf{A}_i \tag{4.3.14a}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \mathbf{B}_i \tag{4.3.14b}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \mathbf{C}_i \tag{4.3.14c}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_n} \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \mathbf{D}_i \quad (4.3.14d)$$

Es folgt demnach für das i – te linearisierte Teilmodell an dem jeweiligen gewählten Arbeitspunkt $\zeta_i = (\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{u}_{0,i})$ nach Gleichung (4.3.13)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{u}_{0,i}) + \mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,i}) + \mathbf{B}_i \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{0,i}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{u}_{0,i}) + \mathbf{C}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,i}) + \mathbf{D}_i \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{0,i}) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Sortieren der Terme liefert:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{u}_{0,i}) - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{0,i}}_{\mathbf{a}_i} \\ &= \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{u}_{0,i}) - \mathbf{C}_i \mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{D}_i \mathbf{u}_{0,i}}_{\mathbf{c}_i} \\ &= \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} + \mathbf{c}_i \end{aligned}$$

Sofern die Linearisierung nicht in einer Gleichgewichtslage, d.h. $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$, durchgeführt wird, entstehen die affinen Terme \mathbf{a}_i und \mathbf{c}_i . Die somit entstandenen linearen Teilmodelle in den einzelnen Arbeitspunkten werden über die Gültigkeitsfunktionen zu den Arbeitsbereichen gewichtet und es gilt für das approximative TS Fuzzy System folgende Systemdarstellung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i]}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z})} = \sum_{i=1}^{N_R} \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i]$$

$$\mathbf{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} + \mathbf{c}_i]}{\sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z})} = \sum_{i=1}^{N_R} \Psi_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i \mathbf{u} + \mathbf{c}_i] \quad (4.3.17)$$

Die Normierung der Gültigkeitsfunktionen zu Basisfunktionen ist in diesem Fall notwendig, da die Fuzzy-Mengen, im Gegensatz zur Modellierung über Sektor-Nichtlinearitäten, die Orthogonalitätsbedingung nicht zwangsläufig erfüllen. Für eine approximative Modellierung über TS Fuzzy Systeme stellen sich also folgende Fragen:

- Wie viele linearen Teilmodelle werden benötigt?
- Wie sind die Arbeitspunkte zu wählen?
- Wie sind die Zugehörigkeitsfunktionen zu gestalten?

Im Allgemeinen lässt sich die approximative Modellierung von TS Fuzzy Systemen also in die nichtlineare Optimierung der Fuzzyfizierung und in die lineare Optimierung der Defuzzifizierung einteilen. Für die Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen gibt es zahlreiche Methoden [73]. Es stellen sich grundsätzlich die Fragen nach Art und Anzahl der Zugehörigkeitsfunktionen sowie deren Parametrierungen. Abbildung 4.23 zeigt eine Übersicht über die am häufigsten verwendeten Verfahren zur Festlegung der Zugehörigkeitsfunktionen.

Der einfachste Fall für die Partitionierung eines Arbeitsraumes ist die Aufteilung in Form eines regulären Gitters, d.h. die Zugehörigkeitsfunktionen werden äquidistant in allen Dimensionen verteilt. Des Weiteren lassen sich nichtlineare Optimierungsverfahren verwenden, um die Parametrierungen optimal zu gestalten. Allerdings ist hierfür meist ein erheblicher zeit- und rechentechnischer Aufwand aufzubringen. Neben dem bereits erwähnten Clustering bei der datenbetriebenen Modellierung existieren auch Wachstumsstrategien, wie der Local Linear Model Tree Algorithmus (LOLIMOT)

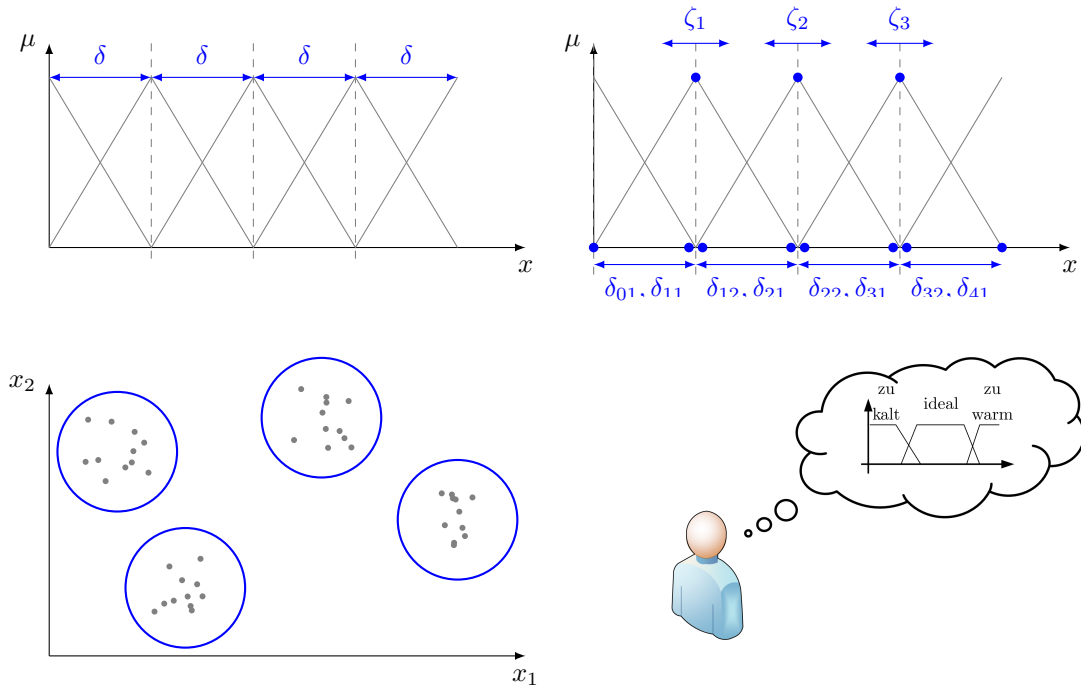


Abbildung 4.23: Möglichkeiten der Festlegung von Zugehörigkeitsfunktionen als reguläres Gitter (oben links), über nichtlineare Optimierungsverfahren (oben rechts), über Clusteringverfahren (unten links) oder durch Expertenwissen (unten rechts)

[77, 89], welche in Abschnitt 4.4 näher beschrieben werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Nutzung von Expertenwissen in Form von WENN-DANN-Regeln.

Sind die Zugehörigkeitsfunktionen festgelegt und ist das physikalische nicht-lineare Prozessmodell bekannt, dann lassen sich die linearen Teilmodelle durch Linearisierung in den resultierenden Arbeitspunkten ζ wie bereits zuvor beschrieben ermitteln. Dabei spielen die Zugehörigkeitsfunktionen eine entscheidende Rolle für die Modellgüte, was im Folgenden anhand des Beispiels des Zwei-Tank Systems verdeutlicht werden soll. Dabei wurden die Modellparameter der Matrizen A_i , B_i und C_i über Linearisierung in den jeweiligen Arbeitspunkten $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_{N_\zeta}]$ ermittelt. Abbildung 4.24 zeigt den Verlauf der Zustände einer Simulation des Zwei-Tank Systems, verglichen mit der approximativen Modellierung über TS Fuzzy Systeme.

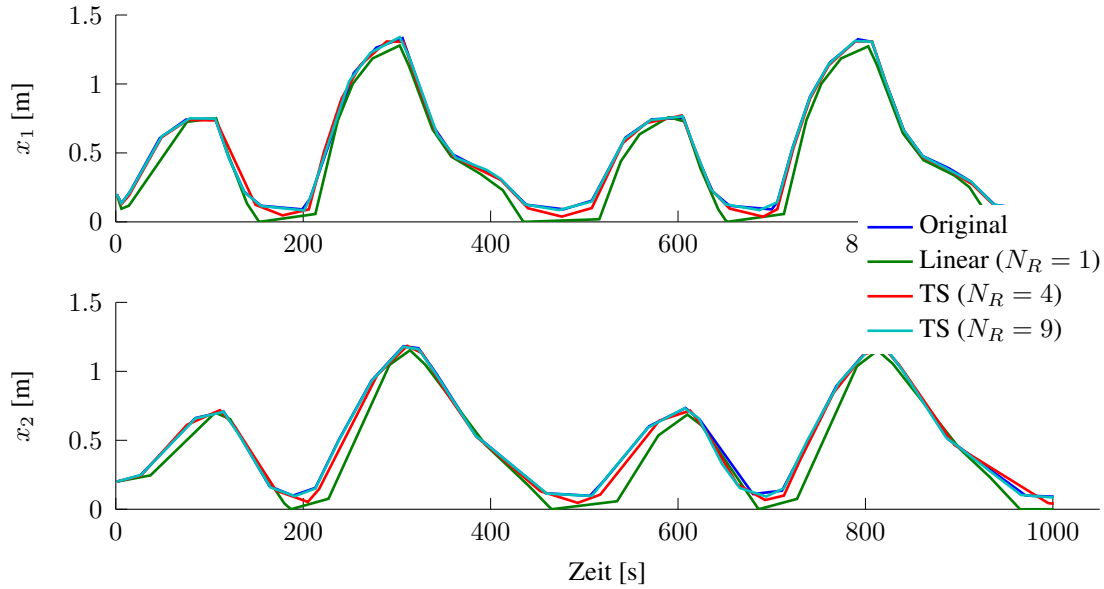


Abbildung 4.24: Approximative Modellbildung eines Zwei-Tank Systems durch Linearisierung

Es bleibt zu erwähnen, dass für eine Modellordnung $N_R = 1$ das TS Fuzzy System einem linearen Zustandsraummodell entspricht. Für $N_R \geq 2$ wurden die Zugehörigkeitsfunktionen äquidistant im Arbeitsraum verteilt. Die Regelbasis wurde vollständig gewählt, d.h. dass alle Kombinationen der Zugehörigkeitsfunktionen für die Scheduling-Variablen x_1 und x_2 verwendet wurden. Es ist deutlich erkennbar, dass mit steigender Anzahl an Arbeitspunkten N_ζ und daraus resultierend auch steigender Anzahl an Regeln für das TS Fuzzy System N_R die Approximationsgenauigkeit zunimmt.

Ein häufig verwendetes Gütemaß zur Bewertung von Approximationen ist der *Root Mean Squared Error (RMSE)*. Der RMSE einer Approximation \hat{x} von einem Modell x über N_d Datensätze lässt sich wie folgt berechnen [90]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_d} (x - \hat{x})^2}{N_d}} \quad (4.3.18)$$

Mit steigender Anzahl an linearen Teilmodellen fällt der RMSE deutlich ab, was die Aussage der universellen Approximation bestätigt. Bereits bei

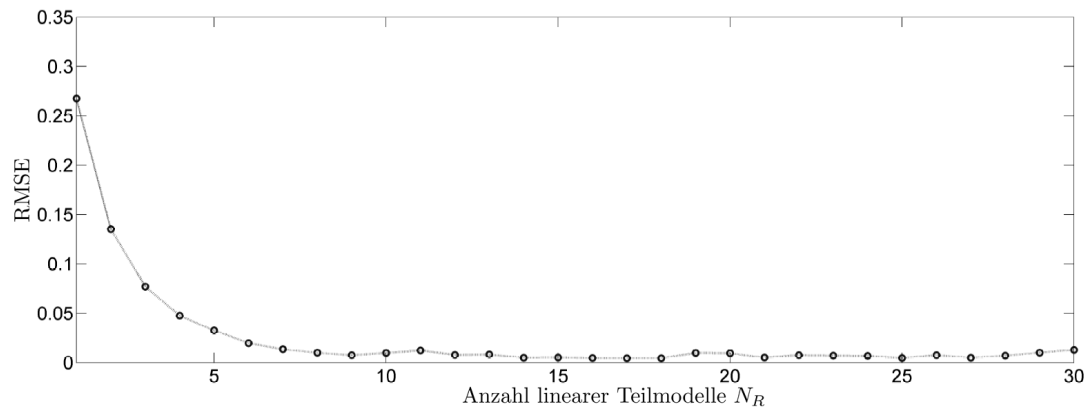


Abbildung 4.25: Approximative Modellbildung eines Zwei-Tank Systems durch Linearisierung

$N_R = 9$ Teilmodellen erreicht der RMSE für dieses Beispiel einen sehr niedrigen Wert. Die Schwankungen, die für noch weiter steigende Anzahlen an linearen Teilmodellen in der Folge auftreten, lassen sich durch numerische Ungenauigkeiten begründen.

Neben der Anzahl an linearen Teilmodellen spielt die Gestalt der Zugehörigkeitsfunktionen eine entscheidende Rolle für die Approximationsgenauigkeit. Abbildung 4.26 zeigt die Approximation mit $N_R = 3$ linearen Teilmodellen. Bei dem Modell TS_{reg} wurden die Zugehörigkeitsfunktionen durch ein reguläres Gitter, d.h. mit äquidistanten Abständen der Arbeitspunkte festgelegt. Bei dem Modell TS_{opt} wurden die Parameter der Zugehörigkeitsfunktionen durch den *Nelder-Mead Simplex Algorithmus* [91] in der Softwareumgebung MATLAB hinsichtlich des RMSE aus Gleichung (4.3.18) optimiert. Da das nichtlineare Verhalten bei TS Fuzzy Systemen durch die Zugehörigkeitsfunktionen abgebildet wird, spielen Funktionsart und Parametrierung also eine entscheidende Rolle hinsichtlich der Approximationsgenauigkeit. Allerdings wird das nichtlineare Verhalten, anders als beim Sektor-Nichtlinearitäten Ansatz in der Gestaltung der Zugehörigkeitsfunktionen nicht direkt berücksichtigt, sondern lediglich approximiert. Ein weiterer Modellierungsansatz der approximativen Modellbildung ist die datengetriebende Modellbildung.

Dabei handelt es sich um einen Gray-Box oder unter Umständen auch Black-Box Ansatz durch Methoden der nichtlinearen Systemidentifikation, wie sie im Folgenden Abschnitt beschrieben werden.

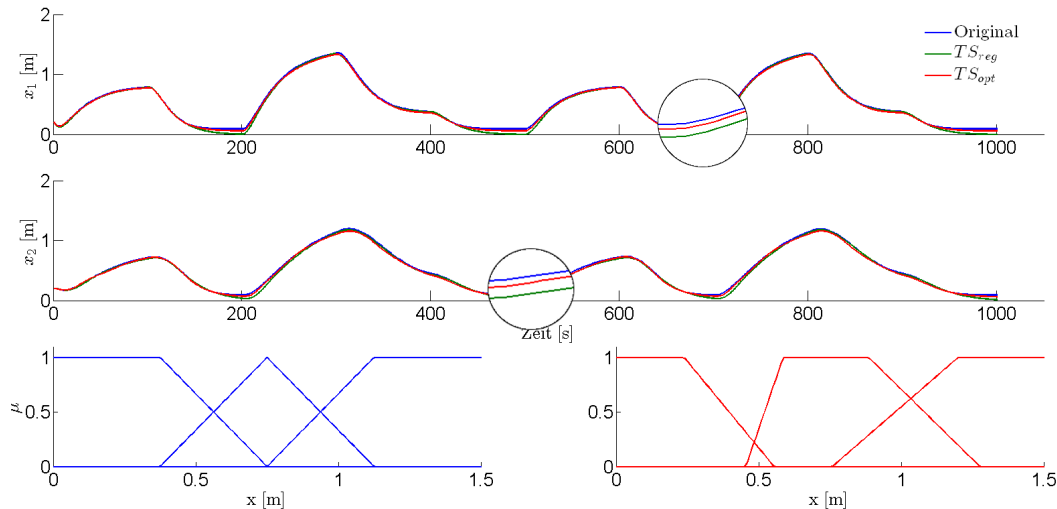


Abbildung 4.26: Vergleich der Approximationsgüte eines regulären Gitters und optimierter Zugehörigkeitsfunktionen

4.4 Approximative Modellbildung durch nichtlineare Systemidentifikation

Zum Verständnis technischer Prozesse und insbesondere für den Reglerentwurf gehört die Modellbildung zu einer der wichtigsten Aufgaben [65, 77]. Dabei ist es nicht immer möglich, eine analytische Modellbildung auf Basis physikalischer Beziehungen mit einer hohen Modellgüte zu betreiben. Für den Anwendungsfall der im Rahmen dieser Arbeit betrachtet wird, die Modellierung örtlich verteilten Raumklimas, ist es beispielsweise enorm schwierig die Modellgleichungen analytisch herzuleiten.

Eine Möglichkeit um dennoch ein mathematisches Modell zu gewinnen, ist die datengetriebene Modellbildung oder Systemidentifikation. Hierbei wird über Optimierungsverfahren aus zuvor gewonnenen Messdaten ein Modell generiert, welches das beobachtete Systemverhalten möglichst genau wiedergibt. Die Optimierungsaufgabe besteht also im Allgemeinen darin, die

Modellgüte, das heißt die Abweichung des modellierten Systems von dem beobachteten Systemverhalten, zu minimieren. Dabei lassen sich verschiedene Ziele im Rahmen der Systemidentifikation verfolgen [77], die sich je nach Art der Verwendung des Modells unterscheiden. Identifizierte Modelle können zur Analyse, Vorhersage, Optimierung, Fehlererkennung oder auch zur Regelung [65, 92, 93] eingesetzt werden. Je nach Art des Einsatzgebietes kann eine Simulation, eine Einschnitt- oder eine Mehrschrittprognose das Ziel der Modellverwendung sein.

Im Allgemeinen gliedert sich die Systemidentifikation in die Struktur- und die Parameteridentifikation [73]. Bei der Strukturidentifikation wird die Art des Modells festgelegt. Hierzu zählen neben dem Modellansatz (lineare Ansätze, Polynomiale Ansätze, Künstliche Neuronale Netze oder auch Fuzzy Systeme) auch die Ordnung des Systems. An dieser Stelle kann Vorwissen hilfreich sein. Beispielsweise ist es denkbar, dass die Modellstruktur hinreichend bekannt ist, wie im obigen Falle des Zweitanks, die Parameter allerdings nicht. Auch für das Anwendungsbeispiel im Rahmen dieser Arbeit wurden die prinzipiellen physikalischen Zusammenhänge in Abschnitt 3.1.1 hergeleitet. Bei solchen Identifikationsproblemen handelt es sich um einen sogenannten Gray-Box Ansatz, wohingegen die Systemidentifikation ohne jegliches Vorwissen einem Black-Box Ansatz entspricht [94].

Entscheidend für die erfolgreiche Systemidentifikation ist neben der richtigen Modellstruktur die Qualität der Signale, die zur Identifikation verwendet werden. Hier gilt es auf der einen Seite, Eingangssignale für das System zu generieren, die einen hohen Informationsgehalt über das zu identifizierende System liefern, als auch auf der anderen Seite die gewonnenen Daten aufzubereiten. Hierzu zählen Maßnahmen wie Filterung, Normalisierung, usw.

Die datengetriebene Modellbildung ist daher ein iteratives Verfahren, bestehend aus den zuvor genannten Aufgaben, welches solange wiederholt wird, bis ein gewünschtes Gütemaß, abgeleitet aus den Zieldefinitionen, erreicht ist. Abbildung 4.27 zeigt schematisch den Ablauf der Systemidentifikation. In den Folgenden Abschnitten werden die Verfahren zur Struktur- und Pa-

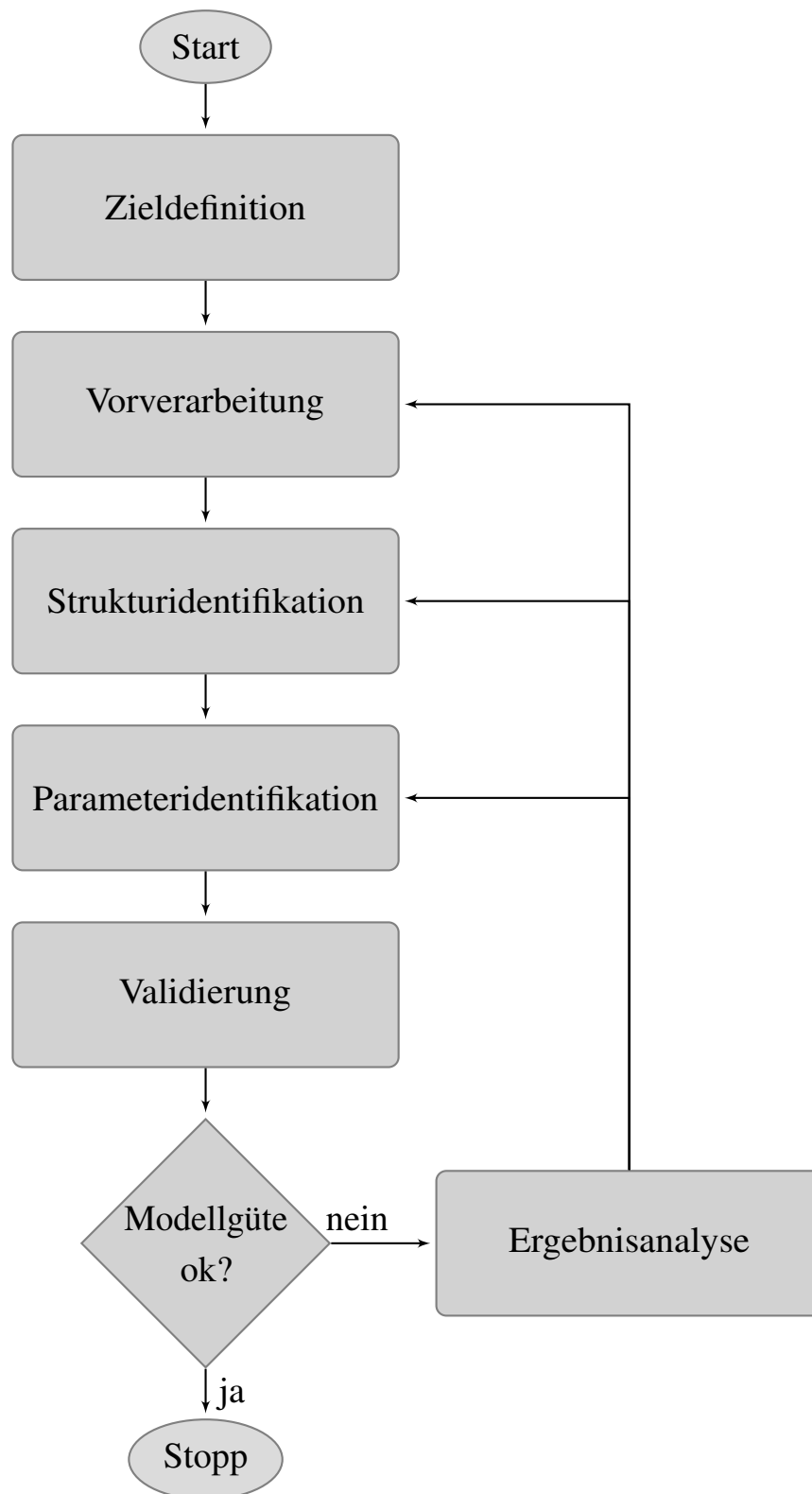


Abbildung 4.27: Schematischer Ablauf einer Systemidentifikation (vgl. [65])

parameteridentifikation vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit angewendet werden. Tiefergehende Informationen zum Thema Systemidentifikation finden sich in [65, 70, 77, 78, 80, 89, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Bezüglich der Datenvorverarbeitung sei insbesondere auf [99, 100] verwiesen.

4.4.1 Anregungssignal

In diesem Abschnitt soll die Informationsgewinnung zur eigentlichen Systemidentifikation beschrieben werden. Zunächst einmal müssen Daten im Rahmen von Experimenten gewonnen werden, die in den weiteren Arbeitsschritten für die Identifikation verwendet werden können. In real durchgeführten Experimenten können solche Daten Ausreißer, Lücken oder ähnliche Eigenschaften aufweisen, die für eine Systemidentifikation von Nachteil sind. Die Bereinigung solcher Zeitreihen ist in der Literatur ausreichend beschrieben und sehr problemspezifisch. Daher sei zur Datenaufbereitung auf [99, 100] verwiesen.

Um Daten mit einem hohen Informationsgehalt zu gewinnen, muss das System ausreichend angeregt werden. Nur Informationen die während der Identifikationsphase bereits vorliegen, können später vom Modell auch wiedergegeben werden [73]. Die Wahl des Anregungssignals beeinflusst das Ergebnis der Identifikation also entscheidend und definiert eine obere Schranke für die Modellgüte des identifizierten Systems [77]. Im Rahmen der linearen Systemidentifikation werden häufig sogenannte „*Pseudo Random Binary Signals (PRBS)*“ verwendet [95, 96, 97]. Das PRBS ist ein rein frequenzmoduliertes Signal, was im Fall linearer Systeme für eine ausreichende Anregung des Systems sorgt. In [77] wird allerdings gezeigt, dass das PRBS für die Identifikation nichtlinearer Systeme unzureichend ist, da hier ebenfalls eine Amplitudenmodulierung notwendig ist, um verschiedene Arbeitsbereiche erreichen zu können. Daher wird in [77, 83] vorgeschlagen, ein PRBS zu erzeugen und dieses im Anschluss ebenfalls in der Amplitude zu modulieren. Dabei wird der Eingangsraum von $u = [u_{min}, u_{max}]$ äquidistant

in die Anzahl der binären Sprünge des PRBS geteilt. Anschließend werden die so ermittelten Amplituden zum PRBS Signal addiert. Somit entsteht ein amplitudenmoduliertes PRBS (APRBS). Je länger das Testsignal wird, desto feiner wird auch die Amplitudenmodulation, da die Anzahl der binären Sprünge steigt. Neben der Amplitudenmodulation stellt sich die Frage der minimalen Haltezeit der Frequenzmodulation. Die minimale Haltezeit T_H wird bei linearen Systemen häufig mit der Abtastzeit gleich gesetzt [77]. Bei nichtlinearen Systemen ist diese Regel allerdings nicht empfehlenswert, da das System die Möglichkeit haben sollte, in Arbeitspunkten einzuschwingen, um das statische Verhalten in einzelnen Arbeitspunkten beschreiben zu können. In [77] wird daher vorgeschlagen, die minimale Haltezeit der größten Zeitkonstante $T_H \approx T_{max}$ des Systems anzupassen. Abbildung 4.28 zeigt beispielhaft ein APRBS.

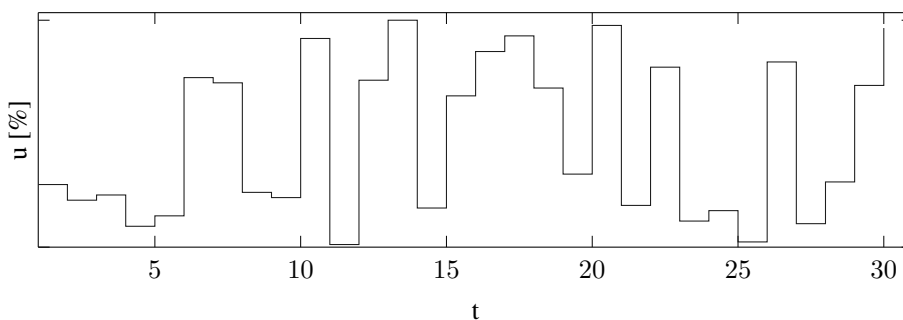


Abbildung 4.28: Beispiel für ein amplitudenmoduliertes PRBS

Bislang wurde davon ausgegangen, dass bei der Systemanregung ein offener Regelkreis vorliegt und das System beliebig angeregt werden kann. Im Realfall ist dies häufig nicht gegeben, da möglicherweise ein instabiles System vorliegt oder das System soll nicht im offenen Kreis betrieben werden um unerwünschte Systemzustände zu vermeiden. An dieser Stelle lassen sich Informationen nur im geschlossenen Regelkreis gewinnen. Ein Problem, welches hierbei im geschlossenen Regelkreis auftritt, ist die Korrelation des Störsignals mit dem Eingangssignal aufgrund der Rückführung. In der offenen Kette besteht hier keinerlei Verbindung. Für die Identifikation im geschlossenen Regelkreis wird zwischen zwei Verfahren unterschieden, der

direkten und der *indirekten Methode* [93, 102, 103, 104, 105, 106, 107]. Bei der direkten Methode wird die Korrelation zwischen dem Anregungssignal, welches dem Reglerausgang entspricht, und dem Störsignal nicht berücksichtigt. Sofern der Prozess durch die Vorgabe des Sollwerts ausreichend angeregt ist, lassen sich bestimmte Methoden der Systemidentifikation für den offenen Regelkreis anwenden. Lediglich korrelationsbasierte Methoden können in diesem Fall nicht verwendet werden [102]. Aufgrund ihrer Einfachheit ist daher stets zu testen, ob die direkten Methoden der offenen Kette angewendet werden können [102]. Im Rahmen dieser Arbeit, bei der lineare Modelle geschätzt werden sollen, ist dies gegeben. Bei den indirekten Methoden hingegen wird zunächst das System des geschlossenen Kreises identifiziert und im Anschluss, bei Kenntnis des eingesetzten Reglers, auf das Modell des eigentlichen unregulierten Systems zurück gerechnet. Indirekte Methoden sind daher deutlich komplizierter anzuwenden als direkte Methoden.

4.4.2 Bestimmung der Systemordnung

Bevor die Parameter einer gewählten Modellstruktur identifiziert werden können, muss die Systemordnung festgelegt werden, sofern diese nicht durch Vorwissen bekannt ist. Häufig wird ein Ansatz aus Vorwissen und „Probieren“ gewählt bis die Modellgüte ausreichend ist [77]. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Ansatz verwendet, der die Systemordnung lediglich aus den gewonnen Messdaten abschätzt [108], sodass kein Wissen über das eigentliche Systemmodell benötigt wird. Der Ansatz von He und Asada aus dem Jahr 1993 wird im Folgenden kurz zusammengefasst. Definiert wird für ein Ein-/Ausgangsmodell der Form:

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.4.1)$$

ein sogenannter Lipschitz-Quotient q_{ij} für den eindimensionalen Fall:

$$q_{ij} = \frac{|y_i - y_j|}{|x_i - x_j|} \quad i \neq j \quad (4.4.2)$$

mit der Anzahl an verfügbaren Datenpunkten $i = 1, \dots, N_d$. Der Index i kann in diesem Fall als Position in einer Zeitreihe und somit als Zeitindex eines diskreten Signals betrachtet werden. Der Lipschitz-Quotient q_{ij} berechnet sich also aus dem Quotient des Abstandes zweier Punkte im Eingangsraum $|x_i - x_j|$ und des Abstandes zweier Punkte im Ausgangsraum $|y_i - y_j|$. Die Idee der Betrachtung des Lipschitz-Quotienten liegt darin, dass bei Datenpaaren, die im Eingangsraum eng beieinander liegen, vermutet werden kann, dass auch das Ausgangspaar eng beieinander liegt, sofern alle nötigen Eingänge berücksichtigt wurden. Liegt das Ausgangspaar, entgegen der Erwartung, weiter voneinander entfernt, so entsteht ein hoher Lipschitz-Quotient. Dies deutet darauf hin, dass entscheidende Informationen und somit Systemeingänge fehlen. Für den n -dimensionalen Fall folgt für den Lipschitz-Quotienten:

$$q_{ij}^n = \frac{|y_i - y_j|}{\sqrt{(x_1(i) - x_1(j))^2 + (x_2(i) - x_2(j))^2 + \dots + (x_n(i) - x_n(j))^2}} \quad (4.4.3)$$

Nun wird die Dimension n , also die Anzahl der Eingänge oder die Systemordnung, iterativ erhöht und zusätzliche Eingänge berücksichtigt. Die Wahl der Eingänge folgt dabei aus der Menge aller zur Verfügung stehenden Eingänge. Die Lipschitz-Quotienten werden für alle Datenpaare $i = 1, \dots, N_d$, $j = 1, \dots, N_d$, $i \neq j$ bestimmt. Für jede Dimension wird der maximale Lipschitz-Quotient als Lipschitz-Index q^n der Dimension oder Ordnung n definiert:

$$q^n = \max_{i,j,i \neq j} (q_{ij}^n) \quad (4.4.4)$$

Nach der Bestimmung der Lipschitz-Indizes werden diese nach ihrem Wert und der Komplexität sortiert, woraus eine Kurve folgt, wie sie in Abbildung 4.29 exemplarisch gezeigt wird. Das Beispiel aus Abbildung 4.29 zeigt eine Lipschitz-Analyse der Funktion $y(k) = f(y(k-1), y(k-2), y(k-3), u(k-1), u(k-2))$, wobei die Funktion $f(\cdot)$ gegeben ist durch:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1 x_2 x_3 x_5 (x_3 - 1) + x_4}{1 + x_1^2 + x_2^2} \quad (4.4.5)$$

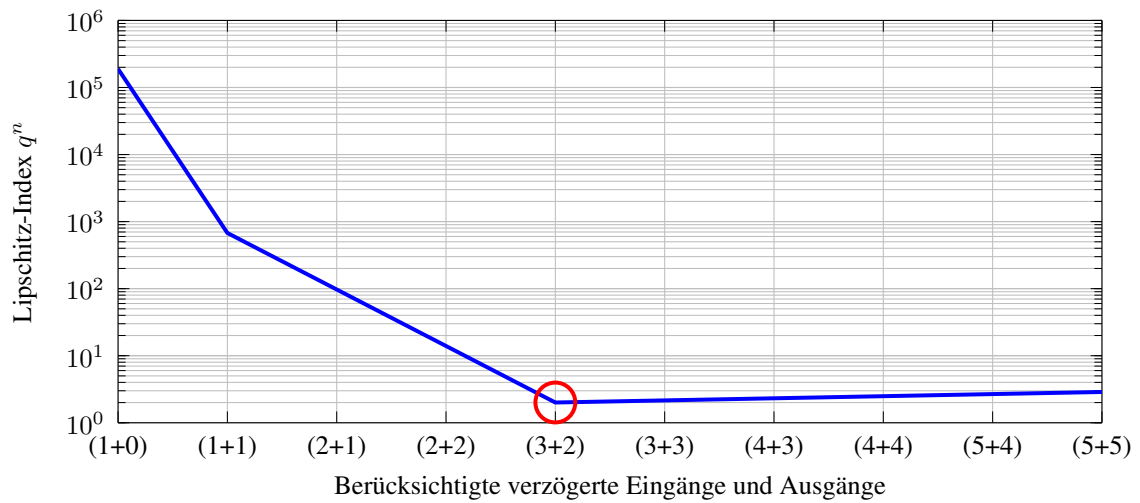


Abbildung 4.29: Beispiel einer Lipschitz-Analyse

Die Analyse wurde mit den Eingängen x_1 bis x_5 und zusätzlichen weiteren verzögerten Ein- und Ausgängen durchgeführt (siehe Klammern in Abbildung 4.29). Hohe Lipschitz-Indizes deuten darauf hin, dass nicht alle nötigen Informationen vorhanden sind und somit Eingangssignale fehlen. Sind alle notwendigen Eingangssignale vorhanden, bleibt der Lipschitz-Index nahezu konstant. An dem auftretenden „Knickpunkt“ ist die notwendige Systemordnung abzulesen. Für das Beispiel aus Abbildung 4.29 liegt der Knickpunkt (rot umrandet) bei $(3 + 2)$ und somit den ersten drei verzögerten Ausgängen y und den ersten beiden verzögerten Eingängen u , was der Funktion aus Gleichung 4.4.5 entspricht. Nach dem Knickpunkt ist durch Hinzunahme weiterer Informationen beziehungsweise Eingänge keine merkliche Verbesserung mehr zu erzielen.

4.4.3 Struktur- und Parameteridentifikation

Nachdem die Systemordnung festgelegt wurde, kann das System identifiziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die vorgestellte Modellstruktur der TS Fuzzy Systeme verwendet. Bei der datengetriebenen Modellbildung besteht die Systemidentifikation dabei aus drei Hauptaufgaben:

- Festlegung der Prämissenvariablen
- Definition von geeigneten Zugehörigkeitsfunktionen. Hierzu gehören Form, Anzahl und Parametrisierung
- Bestimmung der Konsequenten-Parameter, also der Matrizen A_i , B_i und sofern nicht bekannt oder vorgegeben C_i

Diese Schritte sollen im Folgenden erklärt werden.

Bestimmung der Konsequenten-Parameter

Es wird zunächst davon ausgegangen, dass die Prämissenvariablen des Scheduling-Vektors und die damit verbundenen Zugehörigkeitsfunktionen bekannt seien oder bereits ermittelt oder optimiert wurden. Da es sich bei den TS Fuzzy Systemen um lokale lineare Modelle handelt lassen sich für den letzten Schritt der Parameterschätzung lineare Schätzverfahren verwenden. Da experimentell gewonnene Messreihen meist in diskreter Form vorliegen, wird im Folgenden die Schätzung diskreter TS Fuzzy Systeme beschrieben. Eine Übertragung auf den kontinuierlichen Fall ist analog zu [96] leicht ersichtlich. Für ein diskretes TS Fuzzy System gilt analog zu (4.3.17):

$$\mathbf{x}[k+1] = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}[k]) \mathbf{A}_i \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_i \mathbf{u}[k] + \mathbf{a}_i \quad (4.4.6)$$

Für die Parameterschätzung bietet es sich an, dass TS Fuzzy System aus (4.4.6) wie folgt umzuformulieren:

$$\mathbf{x}^T[k+1] = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}[k]) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] & \mathbf{u}^T[k] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Wird die Summation ausgeführt lässt sich das TS Fuzzy System wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{x}^T[k+1] = \mathbf{\Upsilon} \mathbf{\Theta} + \mathbf{E} \quad (4.4.8)$$

Hierbei sind:

$$\Theta = \left[\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{N_R}, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{N_R}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R} \right]^T$$

die zu schätzende Parametermatrix und:

$$\Upsilon = [\eta_1(\mathbf{z}[k])\mathbf{x}[k], \dots, \eta_{N_R}(\mathbf{z}[k])\mathbf{x}[k], \eta_1(\mathbf{z}[k])\mathbf{u}[k], \dots, \eta_{N_R}(\mathbf{z}[k])\mathbf{u}[k], \\ \eta_1(\mathbf{z}[k]), \dots, \eta_{N_R}(\mathbf{z}[k])]^T$$

die gewichtete Messmatrix. Leicht ersichtlich lassen sich nun die gesammelten Datensätze $j = 1, \dots, N_d$ zusammenfassend schreiben als:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T[k+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_d}^T[k+1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_j^T[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \vdots \\ \Upsilon_{N_d} \end{bmatrix}}_{\Upsilon_j} \Theta + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{N_d} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j} \quad (4.4.9)$$

Der tiefstehende Index gibt in diesem Fall die Nummer des Datenpaares wieder, repräsentiert demnach einen diskreten Zeitindex. Ziel ist es nun, das Fehlermaß \mathbf{E}_j über alle Datenpaare zu minimieren. Das verwendete Gütemaß wird analog zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate [77, 109] gewählt:

$$\Theta_{opt} = \arg \min_{\Theta} \sum_{j=1}^{N_d} \mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j = [\Upsilon_j^T \Upsilon_j]^{-1} \Upsilon_j^T \mathbf{x}_j^T[k+1] \quad (4.4.10)$$

Bei der vorgeschlagenen Schätzung handelt es sich um eine globale Schätzung über alle Teilsysteme. In diesem Fall wird auch das globale Systemverhalten quadratisch optimal wiedergegeben. Das bedeutet, der mittlere quadratische Fehler zwischen Modellausgang und Messung nimmt einen minimalen Wert an. Um eine bessere Schätzung hinsichtlich des tatsächlichen linearen beziehungsweise linearisierten Verhaltens in den einzelnen Arbeitspunkten der linearen Modelle zu erhalten, bietet sich eine lokale Schätzung an. Die lokale Schätzung lässt sich durch eine mit den Gültigkeitsfunktionen

gewichtete Kleinst-Quadrate Schätzung realisieren [77]. Dabei wird jedes lineare Teilmodell in einer eigenen Schätzung ermittelt. Die Messmatrix reduziert sich dabei auf die Einträge die das i -te lineare Teilmodell betreffen:

$$\mathbf{\Upsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[1] & \mathbf{u}^T[1] & 1 \\ \mathbf{x}^T[2] & \mathbf{u}^T[2] & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^T[N_d] & \mathbf{u}^T[N_d] & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.11)$$

Somit verändert sich die Optimierungsaufgabe vom globalen Fall für den lokalen Fall zu:

$$\Theta_{i,opt} = \arg \min_{\Theta_i} \sum_{j=1}^{N_d} \eta_i(\mathbf{z}_j) E_j^2 \quad (4.4.12)$$

und es folgt für die i -te lokale Schätzung:

$$\Theta_{i,opt} = [\mathbf{\Upsilon}_{ij}^T \Sigma_{ij} \mathbf{\Upsilon}_{ij}]^{-1} \mathbf{\Upsilon}_{ij}^T \Sigma_{ij} \mathbf{x}^T[k+1] \quad (4.4.13)$$

mit der Wichtungsmatrix:

$$\Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \eta_i(\mathbf{z}[1]) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_i(\mathbf{z}[2]) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \eta_i(\mathbf{z}[N_d]) \end{bmatrix} \quad (4.4.14)$$

Bei gegebener Modellstruktur, welche in diesem Abschnitt angenommen wurde, lassen sich die Konsequenten-Parameter somit durch Gleichung (4.4.13) ermitteln.

Strukturoptimierung

Neben der Parameterbestimmung, die im vorangegangenen Abschnitt hergeleitet wurde, müssen Prämissen-Variablen, Gültigkeitsbereiche der lokalen Modelle sowie die Zugehörigkeitsfunktionen ermittelt werden. Im

Rahmen dieser Arbeit wird für die datengetriebene Modellbildung ein wachsendes Verfahren, der sogenannte Local Linear Model Tree Algorithmus (LOLIMOT) verwendet [77, 98]. Ziel der Strukturoptimierung für die datengetriebene Modellbildung von TS Fuzzy Systemen ist es, eine optimale Teilung des Eingangsraums hinsichtlich der Modellgüte zu erreichen und dabei die Modellkomplexität, das heißt im Falle der TS Fuzzy Systeme die Anzahl linearer Teilmodelle, so gering wie möglich zu halten. Zudem gilt die Annahme, dass kein Wissen über mögliche nichtlineare Einflüsse der Eingangsvariablen vorliegt. Im ersten Schritt wird daher lineares Systemverhalten unterstellt und ein global gültiges lineares Modell identifiziert. Dieses lineare Modell ist nun der Ausgangspunkt oder die Wurzel des wachsenden Baumes, der im Folgenden aufgebaut wird. Es folgt im nächsten Schritt eine achsenorthogonale Teilung des Eingangsraumes, wie sie in Abbildung 4.30 dargestellt ist.

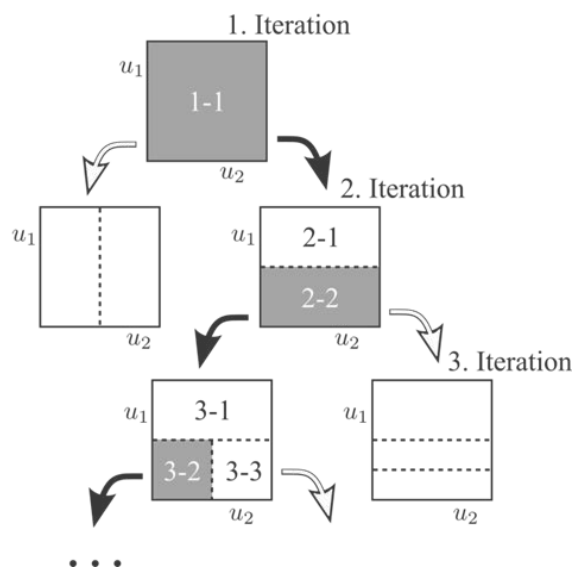


Abbildung 4.30: Funktionsprinzip des LOLIMOT-Algorithmus (aus [77])

Die achsen-orthogonale Teilung bedeutet, dass der Raum jeder Eingangsvariable (in diesem Fall aus Gründen der Visualisierung o.B.d.A. auf zwei Variablen u_1 und u_2 beschränkt), in der Mitte geteilt wird. Jedem neu entstandenen Raum wird nun ein lineares Teilmodell zugeordnet und dessen

Konsequenzen-Parameter nach zuvor beschriebenem Verfahren ermittelt. Dabei werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit aufgrund der einfachen Parametrierung Gaussfunktionen als Gültigkeitsfunktionen verwendet

$$\eta_j = \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(u_1 - \zeta_{1j})^2}{\sigma_{1j}^2} + \frac{(u_2 - \zeta_{2j})^2}{\sigma_{2j}^2} + \dots + \frac{(u_n - \zeta_{nj})^2}{\sigma_{nj}^2} \right) \right) \quad (4.4.15)$$

Um die zuvor beschriebene konvexe Summeneigenschaft einzuhalten, werden die Gültigkeitsfunktionen noch normiert:

$$\Psi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) = \frac{\eta_j}{\sum_{j=1}^{N_R} \eta_j} \quad (4.4.16)$$

Das lineare Modell wird also nach der ersten Iteration zunächst achsen-orthogonal nach u_1 geteilt. Es entsteht eine vorläufig gültige neue TS Fuzzy Struktur. Die Zentren ζ der geteilten Räume sind auch per Definition die Zentren der neuen Gaussfunktionen (vgl. Abbildung 4.31). Für die Standardabweichung der neuen Teilung wird in [77] vorgeschlagen, die Breite der neuen Teilung Δ_{ij} mit einem Proportionalitätsfaktor k_σ zu gewichten. Dabei zeigten Untersuchungen in [77], dass ein Wert von $k_\sigma = 1/3$ in den meisten Fällen gute Ergebnisse erzielt.

Für die beiden neuen lineare Teilmodelle wird die Konsequenzen-Parameterbestimmung durchgeführt. Im nächsten Schritt wird eine Gütefunktion für das neue temporäre TS Fuzzy System bestimmt. Hierbei existieren prinzipiell zwei Strategien. Die identifizierten Modelle lassen sich als Einschnitt-Prädiktoren in seriell-paralleler Anordnung betreiben, dass heißt der zukünftige Prozessausgang wird über die zuletzt gemessenen Prozessausgänge vorhergesagt [98]. Dem gegenüber steht die parallele Anordnung, bei der die zukünftigen Prozessausgänge über zuletzt vorhergesagte Werte ermittelt werden. Man spricht hierbei auch von einem Ausgangsfehler-Modell. Die seriell-parallele Anordnung wird auch für die Parameterschätzung in (4.4.13) verwendet. Der Vorteil dieser Anordnung ist, dass lineare Schätzverfahren überhaupt erst möglich sind. Durch die fehlende Rückkopplung

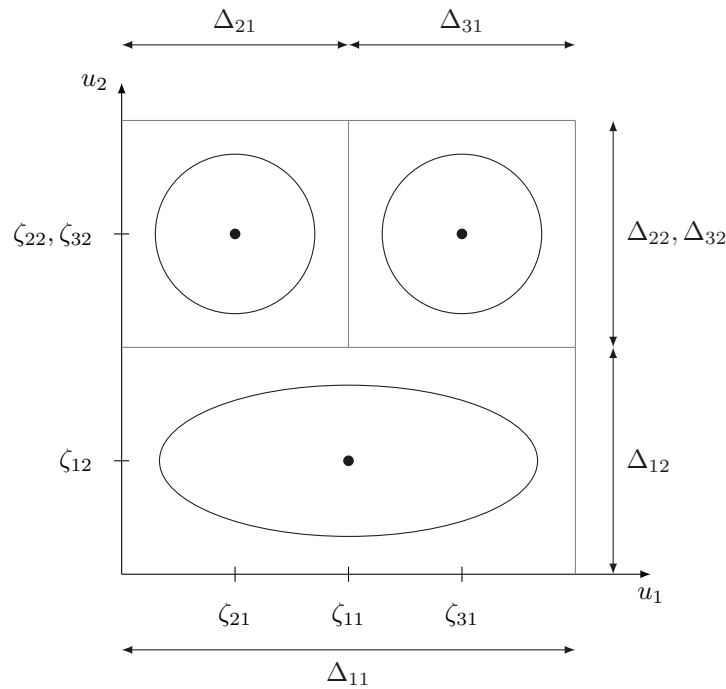


Abbildung 4.31: Bestimmung der Zentren und Standardabweichungen der neuen Teilsysteme (angelehnt an [98])

kommt es zudem nicht zu Stabilitätsproblemen. Ein großer Nachteil ist allerdings, dass die seriell-parallele Anordnung trainiert wird, um den Fehler der Einschnitt-Prädiktion zu minimieren. Für eine Simulation eignen sich diese Modelle nicht zwangsläufig. Da aber die Parameterbestimmung bei parallelen Modellen aufgrund der Rückkopplung um ein vielfaches aufwendiger ist, wird meist auf die seriell-parallele Anordnung zurück gegriffen [98]. Der LOLIMOT-Algorithmus vereint allerdings beide Verfahren durch die Trennung von Struktur- und Parameteroptimierung. Die zu bestimmende Gütefunktion des temporären TS Fuzzy Systems wird anhand des Simulationsfehlers bestimmt. Hierbei wird der mittlere quadratische Fehler der Simulation mit den tatsächlichen Daten berechnet. Anschließend wird, ausgehend vom vorherigen Iterationsschritt, die Teilung in Richtung des nächsten Eingangs, in diesem Fall u_2 vollzogen und selbiges Vorgehen wiederholt. Im Anschluss werden die Gütemaße der temporären TS Fuzzy Systeme verglichen und die beste Teilung beibehalten. Der Iterationsschritt ist abge-

schlossen. Für die nächste Iteration wird der lokale Fehler der einzelnen j Teilsysteme wie folgt berechnet:

$$e_{\text{lokal},j} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \eta_j(\mathbf{z})(y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.4.17)$$

Das System mit dem höchsten lokalen Fehler wird gewählt und die zuvor beschriebene Prozedur der Teilung in den einzelnen Dimensionen wiederholt. Der komplette Algorithmus wird ausgeführt bis ein globales Fehlermaß unterschritten ist. Ein großer Vorteil dieses Vorgehens ist, dass der Algorithmus selbstständig nur nach den Eingangsvariablen teilt, die auch tatsächlich nichtlineares Systemverhalten verursachen, da eine Teilung in Richtung einer Variable, die lediglich linear vorkommt, keine Verbesserung bewirken würde. Algorithmisch lässt sich LOLIMOT wie folgt definieren:

- *Schritt 1:* Initialisierung durch ein globales lineares Modell, bei dem die normierte Gültigkeitsfunktion über den kompletten Eingangsraum 1 beträgt
- *Schritt 2:* Ermittlung lokaler Gütemaße für die einzelnen linearen Teilsysteme. Wahl des Teilsystems mit dem schlechtesten Gütemaß (nur nötig ab der zweiten Iteration, da vorher lediglich ein globales lineares Teilmodell existiert)
- *Schritt 3:* Überprüfung aller möglicher Eingangsraumteilungen für das in Schritt 2 gewählte Teilmodell. Hierzu gehört
 - Festlegung der neuen Gültigkeitsfunktionen. Das Zentrum der neuen Teilung bildet das Zentrum der neuen Gültigkeitsfunktionen. Die Standardabweichung wird über die breite der Partition gewählt.
 - Normierung der Gültigkeitsfunktionen
 - Bestimmung der Konsequenten-Parameter durch Kleinst-Quadrate Schätzung

- Bestimmung eines globalen Gütemaßes für das temporäre TS Fuzzy Modell in paralleler Anordnung (Simulationsfehler)
- Das temporäre TS Fuzzy System mit dem besten Gütemaß wird als Teilung gewählt.
- Ist die erwünschte Modellgüte erreicht endet der Algorithmus, ansonsten weiter bei Schritt 2

Abbildung 4.32 zeigt beispielhaft die ersten drei Iterationen des LOLIMOT-Algorithmus am Beispiel des Zweitanks. Da die nichtlinearen Funktionen des Systems in Form von Wurzelfunktionen vorliegen, ist das ausgeprägte nichtlineare Verhalten im unteren Wertebereich zu finden. Diese Beobachtung wird vom LOLIMOT-Algorithmus bestätigt, der den Eingangsraum insbesondere im niedrigeren Wertebereich feiner unterteilt.

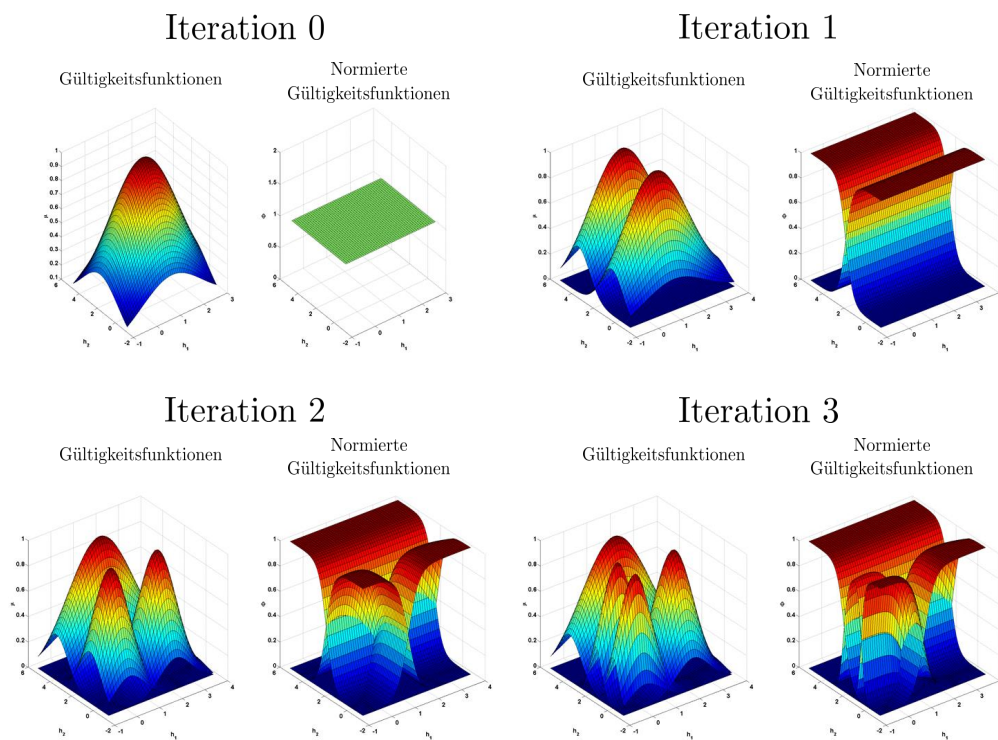


Abbildung 4.32: LOLIMOT am Beispiel des Zwei-Tanks

4.5 Reglersynthese

Die Regelung von TS Fuzzy Systemen kann über das Prinzip der *Parallel Distributed Compensation (PDC)* erfolgen [82, 110]. Dabei muss zwischen affinen und nicht-affinen TS Fuzzy Systemen unterschieden werden. Zunächst wird im Folgenden Abschnitt die Reglersynthese für nicht-affine TS Fuzzy Systeme wie in (4.3.12) beschrieben. Die Erweiterung auf affine TS Fuzzy Systeme folgt im Anschluss.

4.5.1 LMI-basierter Reglerentwurf

Beim Prinzip der PDC wird für ein kontinuierliches nicht-affines TS Fuzzy System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i u]\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

für jedes lineare Teilsystem ein separater Regler entworfen und mit der Gültigkeitsfunktion $\eta_i(\mathbf{z})$ aus obiger Gleichung (4.5.1) gewichtet. Gleiches gilt für diskrete Systeme. Entscheidend ist dabei, dass die Gültigkeitsfunktionen exakt denen des TS Fuzzy Systems entsprechen. Im Folgenden wird die Reglersynthese daher für den kontinuierlichen Fall hergeleitet und lediglich resultierende Berechnungsformeln für den diskreten Fall ergänzt.

Als Regler für die linearen Teilsysteme werden meist einfache Zustandsregler verwendet [81, 82], wobei die Verwendung von Zustandsreglern nicht zwingend ist. In [111] werden beispielsweise PI-Regler für die einzelnen Arbeitspunkte der linearen Teilsysteme entworfen. Für TS Fuzzy Systeme in Zustandsraumdarstellung wie in Gleichung (4.5.1) bietet sich allerdings die weit verbreitete Verwendung von Zustandsreglern an. Es folgt für das PDC

Regelgesetz:

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^{N_R} \mathbf{K}_i \mathbf{x} \quad (4.5.2)$$

Die Bestimmung der Reglerkoeffizienten \mathbf{K}_i kann dabei wie in der linearen Systemtheorie beispielsweise durch Polplatzierung oder Optimierung (LQR) [112] erfolgen. Häufig werden die Reglerkoeffizienten im Zusammenhang mit TS Fuzzy Systemen allerdings implizit über die direkte Methode von Lyapunov ermittelt [81]. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass durch die Suche nach einer Lyapunov-Funktion direkt ein globaler Stabilitätsnachweis für das TS Fuzzy System erbracht werden kann, wohingegen andere Verfahren nur die Stabilität der einzelnen linearen Teilsysteme gewährleisten. In den meisten Fällen werden quadratische Lyapunov-Funktionen angesetzt [113]:

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4.5.3)$$

Die Lyapunov-Funktion V stellt eine Energiefunktion des Zustands dar, die im Ursprung ihr Minimum und den Wert $V = 0$ aufweist. Des Weiteren muss die Matrix \mathbf{P} positiv definit sein. Im Folgenden gilt für positiv definite Matrizen die Notation $\mathbf{P} > 0$. Die asymptotische Stabilität eines Systems ist nach der direkten Methode von Lyapunov demnach gewährleistet, wenn gilt:

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ bzw. } \Delta V(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (4.5.4)$$

Mit (4.5.4) ist sichergestellt, dass die Energiefunktion streng abnimmt und die Zustände somit asymptotisch gegen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ streben.

Für die Reglersynthese ist die Dynamik des geschlossenen Regelkreises von Interesse. Für das TS Fuzzy System aus (4.5.1) mit dem PDC aus (4.5.2) folgt für den geschlossenen Regelkreis:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j \mathbf{x}] \\ &= \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Aus der Forderung (4.5.4) nach einer abklingenden Lyapunov-Funktion folgt im kontinuierlichen Fall des Weiteren:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \\
&\quad \mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \right) \\
&= \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j)] \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \\
&\quad \mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j)] \right) \mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) \mathbf{x}^T \left([(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j)]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j)] \right) \mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{K}_j^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x} < 0
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Da die Ableitung $\dot{V}(\mathbf{x})$ im diskreten Fall durch einen Differenzenquotienten $\Delta V(\mathbf{X})$ ausgedrückt wird, ergibt sich folglich eine andere Beschreibung der Forderung nach einer abklingenden Lyapunov-Funktion (siehe Gleichung (4.5.12)).

Da die Doppelsumme aus (4.5.6) in jedem Fall $\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) > 0$ und zudem \mathbf{x} quadratisch vorkommt, reduziert sich (4.5.6) zur Sicherstellung globaler asymptotischer Stabilität zu:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j - \mathbf{K}_j^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} < 0 \tag{4.5.7}$$

Die Aufgabe der Reglersynthese besteht nun darin, eine gemeinsame Lyapunov-Funktion, dass heißt eine gemeinsame Matrix $\mathbf{P} > 0$, sowie ent-

sprechende Reglerkoeffizienten \mathbf{K}_i für alle $i, j = 1, 2, \dots, N_R$ Teilsysteme zu finden. Dabei stellt Gleichung (4.5.7) aufgrund der multiplikativen Verknüpfung $\mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{K}_j$, sowie deren transponierter Form eine bilineare Matrix Ungleichung (*BMI*) dar. Häufig besteht die Möglichkeit durch mathematische Umformungen BMIs in lineare Matrix Ungleichungen (*LMI*) zu transformieren. Der entscheidende Vorteil von LMIs gegenüber BMIs ist, dass sie sich weitaus effektiver und einfacher lösen lassen [114]. Bei LMIs handelt es sich um lineare Beschränkungen eines konvexen Optimierungsproblems. Die generelle Form einer LMI lautet [115]

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{m_{\text{LMI}}} \kappa_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (4.5.8)$$

mit $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{m_{\text{LMI}}}$ als Entscheidungsvariable und den konstanten Matrizen $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$. Da es sich um Ungleichungen handelt, existiert eine Lösungsmenge $S_L = \{\boldsymbol{\kappa} | \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{m_{\text{LMI}}}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}) > 0\}$, welche eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{m_{\text{LMI}}}$ darstellt. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, eine mögliche Lösung aus der konvexen Lösungsmenge zu finden, beziehungsweise die Nicht-Lösbarkeit festzustellen. Es handelt sich also um ein Lösbarkeitsproblem [115]. Zur Lösung von LMI Problemen wurden Ende der 1980er Jahre effiziente Algorithmen entwickelt. Die am häufigsten verwendete und effektivste Methode zur Lösung von LMI Problemen ist die Innere-Punkt-Methode (Interior-Point-Method) [115]. Im Rahmen dieser Arbeit soll nicht auf die numerischen Eigenschaften dieses Verfahrens eingegangen werden. Hierzu sei auf [115, 116] verwiesen. Es bleibt zu erwähnen, dass heutzutage zahlreiche Solver wie *LMILAB*, *SeDuMi*, *SDPT3*, *uvm*. existieren, wobei im Rahmen dieser Arbeit der Solver *SeDuMi* in Verbindung mit dem Interface *Yalmip* verwendet wird [117].

Wie bereits erwähnt, lassen sich BMIs häufig durch mathematische Umformungen in LMIs transformieren. Gleichung (4.5.7) lässt sich durch die Ersetzungen $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ und $\mathbf{M}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{X}, i = 1, 2, \dots, m_{\text{LMI}}$ wie folgt als

LMI ausdrücken:

$$\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T < 0 \quad (4.5.9)$$

Die Matrix \mathbf{P} und der resultierende PDC Regler als Lösung der LMI aus Gleichung (4.5.9) lässt sich demnach durch Rücktransformation durch $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ und $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{P}$ berechnen. Die Anzahl der LMIs kann auf diese Weise aufgrund der Doppelsumme aus i und j sehr schnell sehr umfangreich werden und das LMI Problem wird dadurch schlechter lösbar. Eine Möglichkeit, die Anzahl der LMIs zu reduzieren ist es, das TS Fuzzy System aus (4.5.5) wie folgt umzuformulieren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}] \\ &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{i < j} \eta_i(\mathbf{z}) \eta_j(\mathbf{z}) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

mit $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j$. Analog lässt sich die Umformung für diskrete TS Fuzzy Systeme durchführen. Um für das TS Fuzzy System nun einen stabilen PDC Regler zu entwerfen, muss eine Lyapunov Funktion gefunden werden, die folgende Beschränkungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} &< 0 \\ \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) &\leq 0 \\ i &< j \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Zusammenfassend gilt für die Stabilisierung von kontinuierlichen TS Fuzzy Systemen durch einen PDC Regler folgende LMI:

LMI_K 1. Das kontinuierliche TS Fuzzy System (4.5.5) mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist global asymptotisch stabil, wenn eine positiv definite Matrix

$\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T &< 0 \\ \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j \\ - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T &< 0 \\ i < j \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

Die Notation \mathbf{LMI}_K verweist darauf, dass es sich um die kontinuierliche Formulierung des LMI Problems handelt. Für diskrete TS Fuzzy Systeme gilt im Folgenden die Notation \mathbf{LMI}_D . Wie bereits erwähnt, soll die detaillierte Herleitung für diskrete Systeme an dieser Stelle nicht erfolgen, da diese weitestgehend analog zum kontinuierlichen Fall verläuft. Für Gleichung (4.5.11) erhält man im diskreten Fall:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} - \mathbf{P} &< 0 \\ \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{P} &\leq 0 \\ i < j \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Für den diskreten Fall ist die Umformung dieses nichtlinearen konvexen Optimierungsproblems etwas aufwendiger als im kontinuierlichen Fall. Zunächst werden auch hier die Ersetzungen $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ und $\mathbf{M}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{X}$, $i = 1, 2, \dots, m$ angewendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} - (\mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i)^T \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i) &> 0 \\ \mathbf{X} - \mathbf{X} \left(\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} \right)^T \mathbf{X}^{-1} \\ \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} \right) \mathbf{X} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Um das nichtlineare Optimierungsproblem nun in LMI Formulierung darstellen zu können, wird das Schur Komplement verwendet [85]. Das Schur Komplement lautet:

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_a & Q_b \\ Q_b^T & Q_c \end{bmatrix} \quad (4.5.14)$$

$$Q > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q_a < 0 \\ Q_c - Q_b^T Q_a^{-1} Q_b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_c < 0 \\ Q_a - Q_b^T Q_c^{-1} Q_b < 0 \end{cases}$$

Demnach folgt aus (4.5.13) folgende LMI:

LMI_D 1. Ein diskretes TS Fuzzy System mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist global asymptotisch stabil, wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \left(\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} \right)^T \\ \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$i < j$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

Der durch die LMIs LMI_K1 beziehungsweise LMI_D1 entworfene Regler garantiert zwar global asymptotisch stabiles Verhalten, allerdings kann die Dynamik in dieser Form nicht festgelegt werden. Um dies zu erreichen lässt sich die Forderung nach einer abklingenden Lyapunov-Funktion (4.5.4) verschärfen indem eine Abklingrate κ vorgegeben wird. Die Forderung lautet dann $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\kappa V(\mathbf{x})$ beziehungsweise $\Delta V(\mathbf{x}) \leq (\kappa^2 - 1)V(\mathbf{x})$ [118]. Für die resultierende Reglersynthese ändern sich die Beschränkungen nur leicht:

LMI_K 2. Das kontinuierliche TS Fuzzy System (4.5.5) mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist global asymptotisch stabil mit der Abklingrate κ , wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \kappa \mathbf{X} &< 0 \\ \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T \\ &+ 2\kappa \mathbf{X} < 0 \\ i &< j \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

LMI_D 2. Ein diskretes TS Fuzzy System mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist global asymptotisch stabil mit der Abklingrate κ , wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \kappa^2 \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} \kappa^2 \mathbf{X} & \left(\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} \right)^T \\ \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i}{2} & \mathbf{X} \end{bmatrix} &\geq 0 \\ i &< j \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

Die Abklingrate κ kann entweder vorgegeben werden, wenn eine bestimmte Dynamik erwünscht ist, oder als Optimierungsparameter freigegeben werden. Die Optimierungsaufgabe lautet dann, die größtmögliche Abklingrate zu finden, zu der sich noch eine Lyapunov-Funktion finden lässt. Diese Art von Optimierungsaufgabe wird *generelles Eigenwertproblem* (GEVP) genannt [115]. Abbildung 4.33 zeigt beispielhaft eine quadratische Lyapunov-Funktion mit jeweils eingezeichneten Höhenlinien.

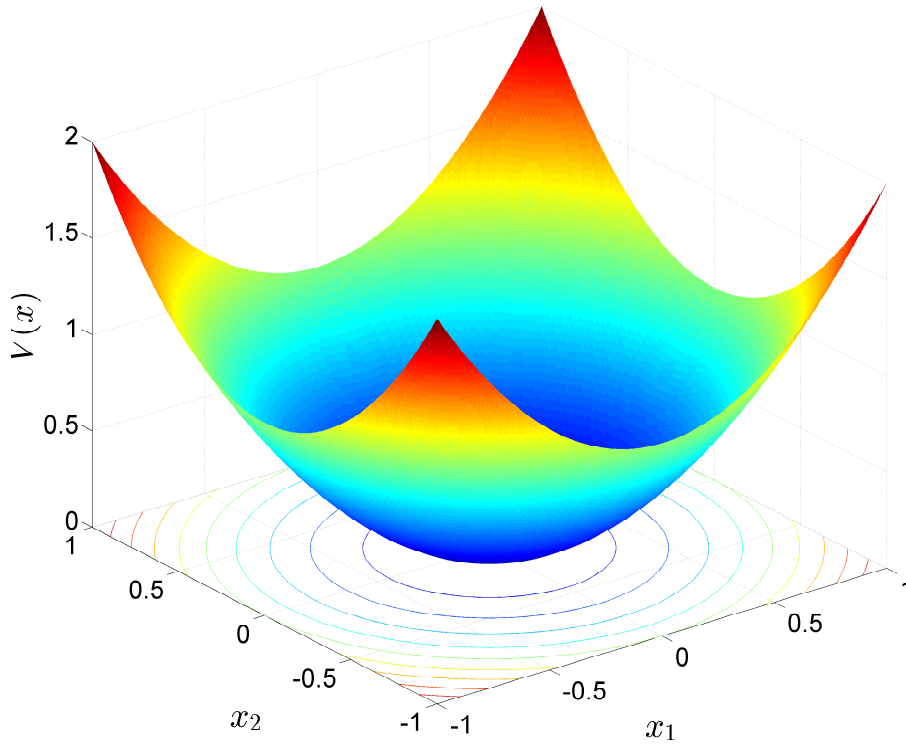


Abbildung 4.33: Beispiel einer quadratischen Lyapunov-Funktion mit eingezeichneten Höhenlinien

An den Höhenlinien gilt $V(\mathbf{x}) = konst..$ Die maximal erreichbare Höhenlinie lässt sich im Fall sättigender Regler für jedes Teilsystem wie folgt berechnen [66]:

$$\xi_i = \frac{u_{max}^2}{\mathbf{K}_i^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_i} \quad (4.5.15)$$

Dabei stellt $u_{max} \geq |u|$ eine symmetrische Stellgrößenbegrenzung dar. Die begrenzende Höhenlinie in der Form eines Ellipsoids (bei der Verwendung von quadratischen Lyapunov-Funktionen $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$) begrenzt das mögliche Einzugsgebiet einer betrachteten Ruhelage, in diesem Fall der Ruhelage $\mathbf{x} = 0$. Es ist leicht ersichtlich, dass für TS Fuzzy Systeme die kleinste Höhenlinie $\min \xi_i$ die untere Schranke zur Sicherstellung der Stabilität darstellt. Mögliche Stellgrößenbeschränkungen lassen sich zudem direkt im LMI-basierten Entwurf berücksichtigen [115]. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$ bekannt sind und innerhalb des Ellipsoids $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \leq 1$ liegen. In [115, 81] wird gezeigt, dass für

den Fall bekannter Anfangszustände der Reglerausgang $|u(t)| \leq u_{max}$ für alle $t > 0$, und somit nach oben beschränkt ist, wenn gilt:

LMI_K 3. Die Stellgröße des geregelten TS Fuzzy System (4.5.5) mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist beschränkt durch $|u(t)| \leq u_{max}$ für alle $t > 0$, wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & u_{max}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

LMI_D 3. siehe LMI_K3

Der Nachteil von LMI_K3 beziehungsweise LMI_D3 ist leicht ersichtlich. Ändert sich der Initialzustand $\mathbf{x}(0)$ muss die komplette Reglerauslegung neu durchgeführt werden. Es ist daher vorteilhaft, anstatt der Initialzustände auch hier eine obere Schranke der Initialzustände $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \mathbf{x}(0)_{max}$ festzulegen. Dann ist die Forderung $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \leq 1$ gleichbedeutend mit $\mathbf{x}(0)_{max}^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{X}$ und es folgt als LMI Bedingung [81]:

LMI_K 4. Die Stellgröße des geregelten TS Fuzzy System (4.5.5) mit dem Regelgesetz (4.5.2) ist beschränkt durch $|u(t)| \leq u_{max}$ für alle $t > 0$ und alle Initialzustände $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \mathbf{x}(0)_{max}$, wenn eine positiv definite Matrix $\mathbf{X} > 0$ und $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, N_R$ existieren, sodass

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{x}(0)_{max}^2 \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & u_{max}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

erfüllt ist. Die Reglerkoeffizienten lassen sich dann durch $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$ berechnen.

LMI_D 4. siehe LMI_K4

Die vorgestellten LMIs lassen sich je nach Anwendung kombinieren. Allerdings bleibt zu erwähnen, dass das Auffinden einer Lyapunov-Funktion, das heißt einer Matrix P und den Reglerkoeffizienten K_i zu konservativen Ergebnissen führen kann und somit relaxierende Maßnahmen erforderlich sein können [81, 85, 115].

4.5.2 PDC mit Sollwertfolge

Der im vorigen Abschnitt beschriebene PDC ist, wie ein Zustandsregler im linearen Fall auch, dafür ausgelegt, die Ruhelage $x = 0$ zu stabilisieren. In vielen technischen Anwendungen ist es allerdings notwendig, eine von Null verschiedene Ruhelage zu stabilisieren. Man spricht in diesem Zusammenhang von Sollwertfolge oder Führungsverhalten, das heißt, dass die Regelgröße y der Führungsgröße w asymptotisch folgen soll [9]. Es soll demnach gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0 \quad (4.5.16)$$

Um dies zu erreichen kann im linearen Fall ein sogenannter Vorfilter eingesetzt werden, der additiv zur eigentlichen Zustandsrückführung wirkt. Das Regelgesetz erweitert sich dann zu [112]:

$$u = -Kx + Vw \quad (4.5.17)$$

Durch den Vorfilter V_F wird demnach nur das stationäre Verhalten des geschlossenen Regelkreises in der Art korrigiert, dass Gleichung (4.5.16) erfüllt ist. Um dies zu erreichen berechnet sich der Vorfilter wie folgt [112]:

$$V_F = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1} \quad (4.5.18)$$

Ein Vorfilterentwurf auf diese Weise ist nur möglich, sofern die Matrixinversionen durchführbar sind, das heißt im Allgemeinen, sofern die Anzahl an Steuer- und Regelgrößen gleich ist.

Eine weitere Möglichkeit das statische Verhalten des geschlossenen Regelkreises auf die gewünschten Sollwerte zu korrigieren ist, die notwendige Stellenergie u_w der erwünschten Ruhelage direkt zu berechnen und im Regelgesetz zu berücksichtigen. Die Zustandsrückführung wird dann nicht mehr auf den Zustand direkt angewendet, sondern auf die Abweichung von der Zielruhelage x_w (siehe Abbildung 4.34). Es folgt für das Regelgesetz [119]:

$$u = u_w - K(x - x_w) \quad (4.5.19)$$

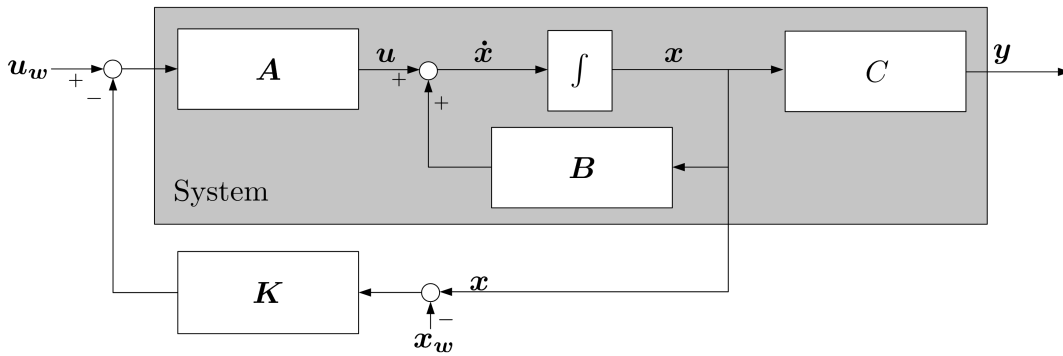


Abbildung 4.34: Blockschaltbild einer linearen Zustandsrückführung mit Sollwertfolge

Für die Zielruhelage (x_w, u_w) soll zum einen die Forderung nach Sollwertfolge aus Gleichung (4.5.16) gelten und des Weiteren muss $\dot{x} = 0$ gelten. Diese Forderungen lassen sich wie folgt mathematisch definieren:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_W \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} x_w \\ u_w \end{bmatrix} \quad (4.5.20)$$

Somit folgt für die Berechnung der Zielruhelage (x_w, u_w) im linearen Fall:

$$\begin{bmatrix} x_w \\ u_w \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (4.5.21)$$

Auch hier gilt, dass die Inverse W^{-1} nur bei quadratischen Systemen, dass heißt bei Systemen mit gleicher Anzahl an Stell- und Regelgrößen, gebildet

werden kann [120]. Bei nicht-quadratischen Systemen kann die Bedingung der Sollwertfolge aus Gleichung (4.5.16) im Allgemeinen nicht für alle Regelgrößen erfüllt werden, da zwangsläufig einige Regelgrößen eine freie Dynamik aufweisen werden [121]. Es ist daher notwendig, die Forderung der Sollwertfolge aufzulockern. Anstelle des Grenzwertes der Regelabweichung liegt es nahe im Fall nicht-quadratischer Systeme die quadratische Fehlersumme über alle Regelgrößen beziehungsweise Regelabweichungen zu minimieren [120]. Auf diese Weise wird die Regelgüte zumindest in Form eines Kompromisses optimiert. Das Gütemaß lautet demnach:

$$e_{\text{control}} = \sum_{i=1}^p (y_i - w_i)^2 \quad (4.5.22)$$

Neben der Forderung eines minimalen quadratischen Regelfehlers e_{control} aus Gleichung (4.5.22) muss zusätzlich sichergestellt werden, dass es sich um einen stationären Zustand $\dot{\mathbf{x}} = 0$ handelt. Das heißt, bei der vorliegenden Optimierungsaufgabe handelt es sich um ein lineares Optimierungsproblem unter Gleichungsnebenbedingungen. Solche Optimierungsprobleme werden üblicherweise mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren gelöst [77]. Die Optimierungsaufgabe lässt sich daher wie folgt formulieren:

$$\min_{\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w} \sum_{i=1}^p (y_i - w_i)^2$$

(4.5.23)

unter der Bedingung das

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Die Lösung für solch ein Kleinst-Quadrate-Optimierungsproblem unter Gleichungsnebenbedingungen findet sich in [77]. Sie lässt sich mit Hilfe der Pseudoinversen $\mathbf{W}^+ = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$ wie folgt berechnen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \left(\mathbf{W}^+ + (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{L} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{W}^+ \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.5.24)$$

Mit Hilfe dieser Berechnungsvorschrift lässt sich die Zielruhelage $(\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w)$ für unteraktuierte Systeme, das heißt, für Systeme mit einer höheren Anzahl an Regelgrößen als verfügbaren Stellgrößen, hinsichtlich des quadratischen Fehlers über alle Regelgrößen zumindest optimieren.

Das zuvor beschreibende Prinzip der Zustandsregelung mit Sollwertfolge lässt sich vom linearen Fall auch auf den nichtlinearen Fall in Form der TS Fuzzy Systeme übertragen. Abbildung 4.35 zeigt das Blockschaltbild für den nichtlinearen Fall. Strukturell ergeben sich hierbei keine Unterschiede.

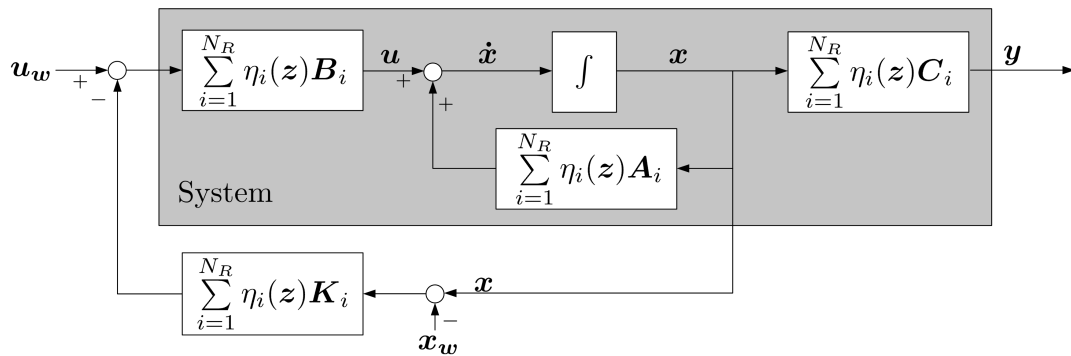


Abbildung 4.35: Blockschaltbild einer PDC Regelung mit Sollwertfolge

Das PDC Regelgesetz lautet für den Fall der Sollwertfolge demnach:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w - \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{K}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) \quad (4.5.25)$$

Zur Berechnung der Zielruhelage $(\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w)$ müssen alle N_R Teilsysteme des TS Fuzzy Systems berücksichtigt werden. Für die Gültigkeitsfunktionen lassen sich dabei die Zielruhelagen verwenden, sofern der Scheduling-Vektor \mathbf{z}_w nur diese enthält. Besteht der Scheduling-Vektor aus anderen Größen, die nicht aus den gewünschten Werten berechnet werden können und im vornherein nicht bekannt sind, muss die Berechnung der Zielruhelagen online zur Laufzeit erfolgen. Für den Fall, dass der Scheduling-Vektor nur Größen erhält die entweder die gewünschten Werte (Sollwerte) selbst sind oder sich aus diesen berechnen lassen, lässt sich eine stationäre Matrix $\widetilde{\mathbf{W}}$ analog zu

Gleichung (4.5.26) wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{A}_i & \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}_w) \mathbf{A}_i & \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}_w) \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}_w) \mathbf{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{W}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

Für quadratische Systeme gilt demnach für die Zielruhelage $(\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w)$ wie im linearen Fall auch:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{W}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.5.27)$$

Bei nicht-quadratischen Systemen wird ebenfalls der Ansatz der Minimierung des quadratischen Regelfehlers verfolgt. Für die Optimierungsaufgabe unter Gleichungsnebenbedingungen aus (4.5.23) folgt im Fall der TS Fuzzy Systeme:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w} \sum_{i=1}^p (y_i - w_i)^2 \\ \text{u.d.B.d.} \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}_w) \mathbf{A}_i & \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}_w) \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

und für die Berechnung der Zielruhelage dementsprechend:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_w \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \left(\widetilde{\mathbf{W}}^+ + (\widetilde{\mathbf{W}}^T \widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{L}}^T \left(\widetilde{\mathbf{L}} (\widetilde{\mathbf{W}}^T \widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{L}}^T \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{L}} \widetilde{\mathbf{W}}^+ \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.5.29)$$

4.5.3 Fallbeispiel: Regelung von TS Fuzzy Systemen mit Sollwertfolge

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Reglersyntheseverfahren für TS Fuzzy Systeme vorgestellt, die neben der Vorgabe von dynamischem Verhalten auch die Sollwertfolge gewährleisten. Abbildung 4.36 zeigt am Beispiel des Zweitanks exemplarische Regelungsergebnisse. Hierbei wurde zunächst angenommen, dass lediglich der Füllstand des zweiten Tanks h_2 geregelt werden soll. Somit stellt das System ein Eingrößensystem dar. Die Minimierung aus (4.5.28) ist demnach nicht erforderlich, da die Matrix \widetilde{W} invertierbar ist. Das TS Fuzzy System wurde nach der Methode der Sektor Nichtlinearitäten hergeleitet. Somit entstehen $N_R = 4$ Teilsysteme. Die Reglerauslegung erfolgte nach LMI_{K2} und LMI_{K3} . Die dadurch ermittelten Reglerparameter lauten:

$$\begin{aligned}
 \kappa = 0, 1 : \quad & \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.36 \\ 0.31 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.12 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} -0.35 \\ 0.46 \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.18 \end{bmatrix} & \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.72 & -0.09 \\ -0.09 & 0.65 \end{bmatrix} \\
 \kappa = 1 : \quad & \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.67 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.48 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.72 \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.52 \end{bmatrix} & \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.35 \\ 0.35 & 0.66 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse zeigen, dass im Falle einer störungsfreien Regelung und eines quadratischen Systems die Sollwertfolge durch den zuvor beschriebenen PDC gewährleistet werden kann. Die Dynamik lässt sich in Form von LMIs vorgeben.

Das betrachtete System verfügt lediglich über eine Stellgröße. Es ist daher technisch nicht möglich, für beide Füllstände unabhängige Sollwerte vorzugeben, da der Füllstand h_1 vom Füllstand h_2 abhängt und keine zusätzliche

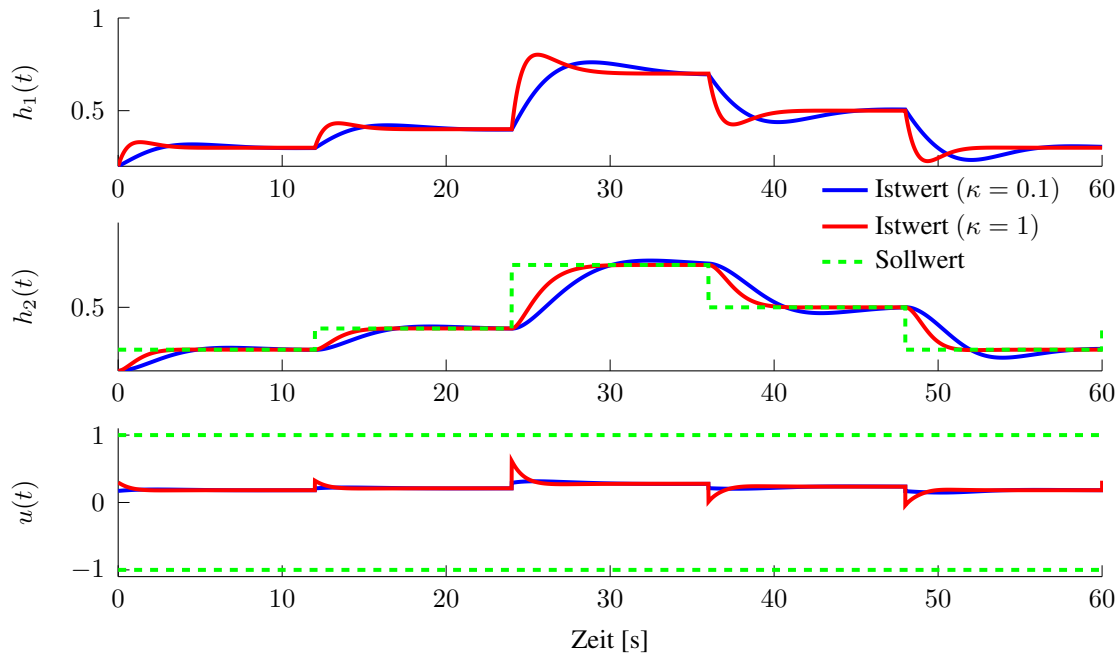


Abbildung 4.36: Füllstandsregelung über PDC mit Sollwertfolge für ein quadratisches System

Eingriffsmöglichkeit besteht. Die Parameter des Systems wurden so gewählt, dass sich stationär identische Werte für beide Füllstände h_1 und h_2 einstellen. Für ein derartiges System lassen sich die Zielruhelagen \mathbf{x}_w, u_w nach Gleichung (4.5.27) nicht berechnen, da die Matrix $\widetilde{\mathbf{W}}$ nicht invertierbar ist. Da es also nicht möglich ist, die Sollwertfolge für beide Zustände h_1 und h_2 zu gewährleisten, wird versucht, die quadratische Abweichung der beiden Regelfehler mit Hilfe der Optimierung aus (4.5.24) zu minimieren.

Das Ergebnis ist in Abbildung 4.37 für $\kappa = 1$ dargestellt. Erwartungsgemäß konnten die Sollwerte zwar nicht eingehalten werden, allerdings ist der Regelfehler im Rahmen der technischen Realisierbarkeit minimiert worden. Bei einer Zeit von ca. $t = 40\text{s}..50\text{s}$ beträgt der Sollwert für beide Zustände $h_1 = h_2 = 0,5$. Wie bereits erwähnt, ist das System so parametrisiert worden, dass sich stationär identische Füllstände einstellen. Gleiches Ergebnis liefert in diesem Fall die Optimierung, sodass in dieser Phase die Sollwertfolge für beide Zustände gewährleistet werden kann.

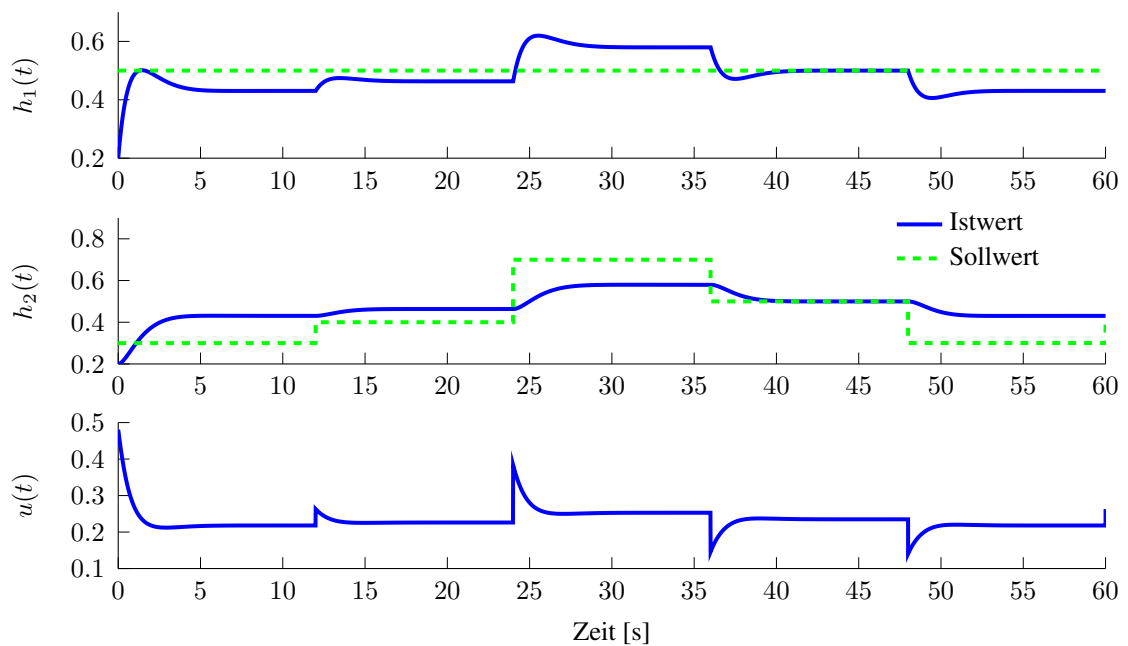


Abbildung 4.37: Füllstandsregelung über PDC mit Sollwertfolge für zwei Regelgrößen und einer Stellgröße

Da es sich sowohl beim Vorfilter als auch bei der zuvor vorgestellten Erweiterung des PDC zur Sollwertfolge um eine Vorwärtssteuerung handelt, ist ein korrektes Modell des Systems zwingend erforderlich, da sonst die Sollwertfolge nicht mit stationärer Genauigkeit realisiert werden kann [112]. Zudem führt das vorwärtsgesteuerte Prinzip nur im Fall störungsfreier beziehungsweise nur impulsartig gestörter Prozesse zu stationär genauer Sollwertfolge. Sprungförmige, anhaltende Störungen wirken sich direkt auf das Regelungsergebnis aus [112]. Aus den genannten Gründen wird die vorgestellte Reglerstruktur im Folgenden Abschnitt um einen integralen Anteil erweitert.

4.5.4 Integraler PDC zur Sicherung stationärer Genauigkeit

Im vorigen Abschnitt wurde der PDC mit einer Erweiterung zur Sollwertfolge vorgestellt. Da es sich hierbei, wie auch bei der Zustandsregelung lediglich um P-Regler handelt, resultiert in den meisten Fällen eine bleibende Regelabweichung. Um diese zu beseitigen und stationär genaue Regelergebnisse

zu bekommen, muss der Regelkreis um einen integralen Anteil erweitert werden [112, 122]. Dabei gilt es, den Regelfehler $e = y - w$ zu beseitigen. Für das Regelgesetz folgt demnach:

$$u = K_0 \int_0^t e(\tau) d\tau + K_1 x \quad (4.5.30)$$

Durch die Einführung eines neuen Zustandes

$$x_I = \int_0^t y d\tau = \int_0^t Cx d\tau \Leftrightarrow \dot{x}_I = Cx = y \quad (4.5.31)$$

lautet der neue Zustandsvektor sowie die erweiterte Zustandsrückführung nun:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \end{bmatrix} \quad (4.5.32)$$

und schließlich folgt für das erweiterte Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

Leicht nachvollziehbar gilt demnach für ein TS Fuzzy System für den Fall eines integralen Anteils folgendes erweiterte Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_i} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_i} u \\ y &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_i \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_i} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

Für die Dynamik des geschlossenen Regelkreises gilt nach einiger Zwischenrechnung (vgl. [78]):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(z) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i \sum_{j=1}^{N_R} \eta_j(z) \left(\mathbf{K}_{j,1} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{j,0} \int_0^t (\mathbf{y} - \mathbf{w}) d\tau \right) \quad (4.5.35)$$

Die Reglerkoeffizienten, sowohl für die Koeffizienten des integralen Anteils als auch für die Koeffizienten der Zustandsrückführung, liefern die LMIs aus Abschnitt 4.5.1, angewendet auf das erweiterte Zustandsraummodell (4.5.34). Abbildung 4.38 zeigt das Blockschaltbild des PDC mit integralem Anteil.

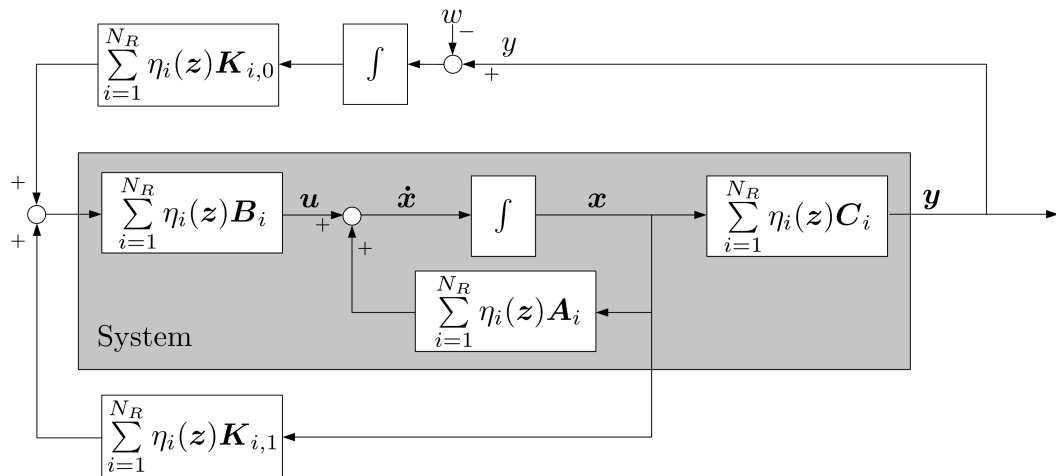


Abbildung 4.38: Blockschaltbild einer PDC Regelung mit Sollwertfolge und integralem Anteil

Es ist ebenfalls möglich, den integralen Anteil lediglich zur Einhaltung der stationären Genauigkeit in näherer Umgebung zuzuschalten und die Verschiebung der Zielruhelage $\mathbf{x}_w, \mathbf{u}_w$ durch die im vorigen Abschnitt beschriebene Methode zu realisieren. Je nach Art der Anwendung kann dieses Vorgehen Vorteile aufweisen. Beispielsweise lässt sich die Optimierung bei nicht-quadratischen Systemen aus (4.5.28) durchführen. Zudem lässt sich die Dynamik über die LMI-basierte Reglersynthese so leichter durchführen. Das zugehörige Blockschaltbild ist in 4.39 dargestellt.

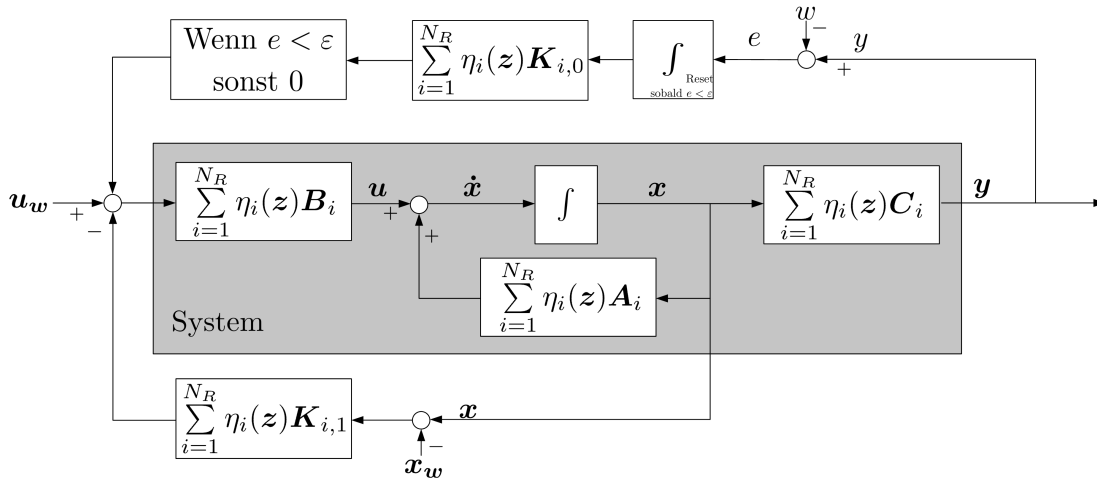


Abbildung 4.39: Blockschaltbild einer PDC Regelung mit Sollwertfolge und zuschaltbarem integralem Anteil

4.5.5 Fallbeispiel: Regelung von TS Fuzzy Systemen mit integralem Anteil

Abbildung 4.40 zeigt das Ergebnis der Regelung mit und ohne integralem Anteil für ein sprungförmig gestörtes System. Geregelt wird in dem Beispiel auf den zweiten Zustand h_2 .

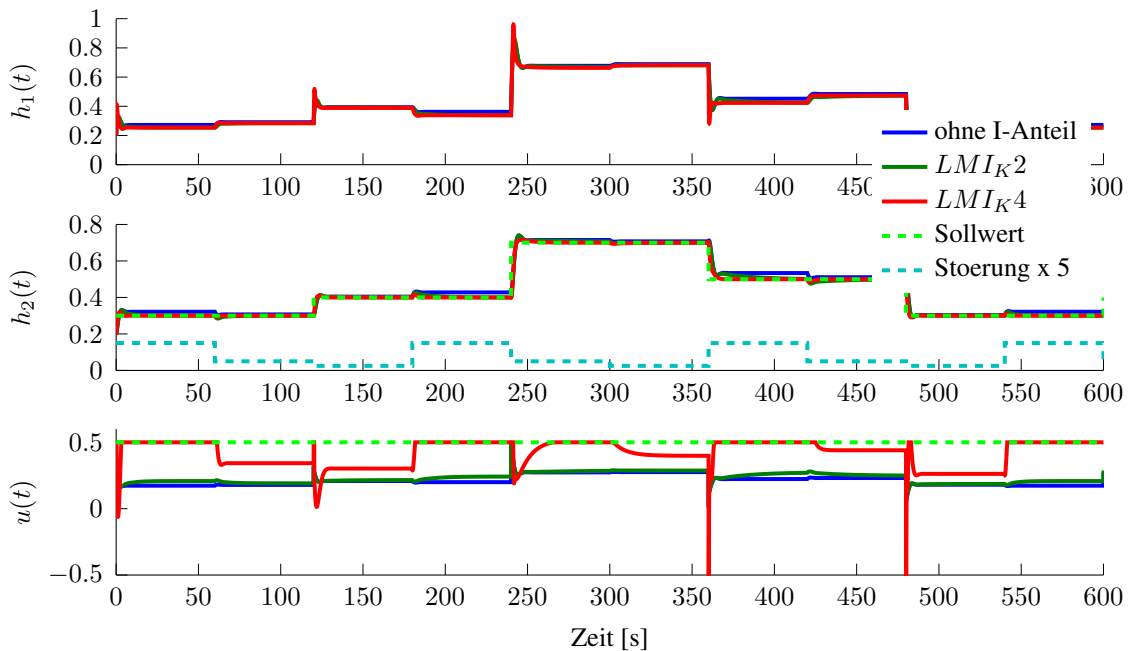


Abbildung 4.40: Ergebnisse der Regelung mit und ohne integralem Anteil

Dabei lässt sich erwartungsgemäß erkennen, dass der Sollwert ohne integralem Anteil durch die Störung nicht gehalten werden kann. Wird der integrale Anteil hinzugenommen, lässt sich die stationäre Genauigkeit sicherstellen. Dabei wurde beim Reglerentwurf die Stellgrößenbeschränkung durch die Kombination von LMI_{K2} und LMI_{K4} mit $u_{max} = 0,5$ berücksichtigt (grün), im anderen Beispiel jedoch vernachlässigt (nur LMI_{K2} , rot). Wie anzunehmen zeigt die grüne Kurve eine Annäherung der Stellgröße an u_{max} , es findet aber zu keinem Zeitpunkt eine Sättigung der Stellgröße statt. Beim Entwurf ohne Berücksichtigung der Beschränkung ist eine deutlich höhere Amplitude zu erkennen, die in einigen Fällen auch die Sättigung erreicht.

4.5.6 Regelung von affinen TS Fuzzy Systemen

In den vorigen Abschnitten wurde die Regelung nicht-affiner TS Fuzzy Systeme erläutert. Bei der approximativen Modellierung von TS Fuzzy Systemen entstehen aber, sofern nicht in einer Gleichgewichtslage linearisiert beziehungsweise modelliert wird, affine Driftterme in den Teilsystemen. Diese affinen Driftterme müssen in der Reglersynthese berücksichtigt werden. In der Literatur finden sich hierzu unterschiedliche Verfahren. In [123, 124] findet die Reglersynthese von affinen TS Fuzzy Systemen basierend auf einer quadratischen Lyapunov Funktion statt. Für das affine TS System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u + \mathbf{a}_i] \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) [\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{D}_i u + \mathbf{c}_i]\end{aligned}\tag{4.5.36}$$

wird folgendes Regelgesetz in PDC-Form vorgeschlagen:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) (-\mathbf{K}_i \mathbf{x} - \mathbf{k}_{\alpha,i})\tag{4.5.37}$$

Die Herleitung der quadratischen Lyapunov-Funktion beziehungsweise deren Ableitung folgt analog zum nicht-affinen Fall in Gleichung (4.5.6) (hier für

den kontinuierlichen Fall). Allerdings führt diese im Fall affiner TS Fuzzy Systeme auf nichtlineare LMIs. Zur Lösung wird in [123, 124] ein iterativer Optimierungsalgorithmus präsentiert. Allerdings führt dieses Vorgehen zu konservativen Ergebnissen und ist aufwendig in der Reglersynthese.

Eine einfachere Möglichkeit der Berücksichtigung der affinen Terme wird in [125] vorgestellt. Um den Driftterm \mathbf{a}_i in den Teilsystemen des TS Fuzzy Systems (4.5.36) zu kompensieren muss ein Eingangssignal $u_{\text{drift},i}$ gefunden werden, sodass für jedes Teilsystem gilt:

$$\mathbf{B}_i \mathbf{u}_{\text{drift},i} + \mathbf{a}_i = 0 \quad (4.5.38)$$

Im Allgemeinen lässt sich dieses Eingangssignal über die Moore-Penrose Pseudo Inverse berechnen:

$$\mathbf{u}_{\text{drift},i} = -\mathbf{B}_i^+ \mathbf{a}_i \quad (4.5.39)$$

wobei $\mathbf{B}_i^+ = (\mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i)^{-1} \mathbf{B}_i^T$. Wird $\mathbf{u}_{\text{drift},i}$ in das affine TS Fuzzy System (4.5.36) eingesetzt, wird der Driftterm nur dann vollständig kompensiert, sofern $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^+ = \mathbf{I}$, was nur dann gilt, wenn $\mathbf{B}_i^+ = \mathbf{B}^{-1}$ gilt. Wie bei dem PDC zur Sollwertfolge aus Abschnitt 4.5.2 ist dies nur dann der Fall, wenn alle \mathbf{B}_i invertierbar sind, also im Allgemeinen quadratische Systeme vorliegen. Allerdings wird in [126] gezeigt, dass, sofern die Lösung von Gleichung (4.5.38) nicht existiert, die Definition $\mathbf{u}_{\text{drift},i} = \mathbf{B}_i^+ \mathbf{a}_i$ den Einfluss des Driftterms für jedes Teilsystem minimiert und somit die bestmögliche Lösung darstellt. Das vollständige Regelgesetz lautet dann:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{PDC}} - \sum_{i=1}^{N_R} \eta_i(\mathbf{z}) \mathbf{u}_{\text{drift},i} \quad (4.5.40)$$

wobei \mathbf{u}_{PDC} nach einem der zuvor erwähnten Verfahren entworfen werden kann.

5 Örtlich verteilte Modellierung durch verteilte TS Fuzzy Systeme

Im Folgenden wird die in Kapitel 4 eingeführte Modellstruktur sowie die Reglersynthese auf örtlich verteilte Systeme erweitert. Solche örtlich verteilten Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Dynamik neben der Zeit t noch von mindestens einer weiteren Ortsvariable x abhängt. Somit resultieren für die mathematischen Modelle partielle Differentialgleichungen, wie beispielsweise der Prototyp eines generellen Strömungsproblems aus Gleichung (3.1.11). Generell weisen viele realen Systeme eine örtliche Verteilung relevanter Größen auf und sollten daher als örtlich verteilte Systeme beschrieben werden [127]. Im Gegensatz zu den konzentriert-parametrischen Systemen, bei denen zumindest im linearen Fall eine geschlossene Regelungstheorie existiert, ist der Umgang mit örtlich verteilten Systemen aus regelungstechnischer Sicht deutlich komplexer und weniger erforscht [127]. Dies wird besonders bei der Betrachtung nichtlinearer Systeme deutlich [128].

Aus diesem Grund ist ein weit verbreiteter Lösungsansatz, ein örtlich verteiltes System durch ein konzentriert-parametrisches System zu approximieren und im Folgenden die Approximation zu verwenden [127]. Hierbei sind zwei Vorgehensweisen gebräuchlich. Beim *Early-Lumping* Ansatz wird die partielle Differentialgleichung gleich zu Beginn durch ein konzentriert-parametrisches System approximiert und die Reglersynthese mit Hilfe der Approximation durchgeführt. Dabei erfüllt der Regler zwar die Anforderungen bezüglich der Approximation, nicht aber zwangsläufig die des tatsächlichen Systems. Die Approximationsgenauigkeit spielt daher beim

Early-Lumping Ansatz eine entscheidende Rolle für die Regelgüte. Beim *Late-Lumping* Ansatz wird die Reglersynthese anhand des örtlich verteilten Systems und den beschreibenden partiellen Differentialgleichungen durchgeführt und anschließend reduziert. Hierfür ist allerdings eine eigene Theorie zum Reglerentwurf notwendig. In [127] werden Ansätze beschrieben, die die Zustandsraummethodik auf örtlich verteilte Systeme überführen. Dabei stellen die Zustände sogenannte abstrakte Funktionen in einem geeigneten Funktionenraum dar. Die Herleitung der abstrakten Zustandsraummodelle ist weitaus schwieriger als im konzentriert-parametrischen Fall. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Early-Lumping Ansatz verfolgt. Ein Grund hierfür ist auch, dass die Systemidentifikationsmethoden aus Kapitel 4.4 nur für den Early-Lumping Ansatz anwendbar sind. In den Folgenden Abschnitten wird daher die Approximation örtlich verteilter Systeme durch eine Erweiterung der TS Fuzzy Systeme vorgestellt.

5.1 Numerische Behandlung örtlich verteilter Systeme

In der Literatur werden partielle Differentialgleichungen häufig in die drei Kategorien

- elliptisch
- parabolisch
- hyperbolisch

eingeteilt. Zwar lassen sich viele partielle Differentialgleichungen, speziell wenn sie von zwei Variablen (beispielsweise Ort x und Zeit t) abhängen, in eine dieser drei Kategorien unterteilen, dennoch ist diese Gliederung nicht vollständig und für höher-dimensionale oder nichtlineare Probleme schwierig bis unmöglich. Zudem wird mit der Einteilung in diese drei Kategorien suggeriert, dass ein allgemein gültiges und nützliches Schema zur Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen existiert, was allerdings nicht

der Fall ist [128]. Aus diesem Grund, und da im Rahmen dieser Arbeit die Form der partiellen Differentialgleichungen unerheblich ist, wird auf die Einteilung verzichtet.

Da für partielle Differentialgleichungen aufgrund häufig auftretender komplexer geometrischer Strukturen keine allgemeine Lösungstheorie besteht, wird in den meisten Fällen auf numerische Lösungsverfahren zurückgegriffen. Die wohl bekanntesten Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen sind die Methode der Finiten-Differenzen und der Finiten-Elemente [129]. Dabei wird die Finite-Differenzenmethode auf eine rechteckige Gitterstruktur im kartesischen Koordinatensystem angewendet, wohingegen bei den Finiten-Elementen die örtliche Diskretisierung durch eine Triangulation des Arbeitsraumes vollzogen wird. Demnach eignet sich die Methode der Finiten-Elemente für komplexe geometrische Strukturen aufgrund der flexibleren räumlichen Diskretisierung besser. Da im Rahmen dieser Arbeit die Modellierung des örtlich verteilten Raumklimas im Fokus steht, sind die geometrischen Gegebenheiten meist einfache Strukturen, sodass die etwas weniger aufwendige Methode der Finiten-Differenzen angewendet werden kann.

Zur Formulierung eines örtlich verteilten Problems gehört neben der partiellen Differentialgleichung als solche auch die Definition des örtlichen Betrachtungsgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{Dim}}}$ mit dem Rand $\partial\Omega$ und die Festlegung der örtlichen Randbedingungen auf dem Rand $y(\partial\Omega)$. Sind diese gegeben, so lautet die allgemeine statische nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der gesuchten Größe $y = y(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{Dim}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{Dim}}} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Dim}}} b_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + f_{\text{NL}}(\cdot) = 0 \quad (5.1.1)$$

mit den Ortsvariablen $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_{\text{Dim}}})$ (x dient im Folgenden als Ortsvariable und nicht mehr als Systemzustand). Die Funktion $f_{\text{NL}}(\cdot)$ kann eine beliebige nichtlineare oder lineare Funktion der gesuchten Variablen y oder einer partiellen Ableitung jedweder Ordnung darstellen. Auch eine

reine Abhängigkeit von den Ortvariablen x ist möglich. Die Erweiterung auf Probleme höherer Ordnung ist leicht ersichtlich, allerdings lassen sich die Mehrzahl der technischen Probleme durch Systeme zweiter Ordnung beschreiben. Die Erweiterung auf dynamische Systeme folgt nachdem die örtliche Diskretisierung erläutert wurde.

Wie bereits erwähnt, ist die exakte Lösung der statischen partiellen Differentialgleichung $y(\Omega)$ auf einem Arbeitsraum (hier beispielhaft in zwei Dimensionen):

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | r_1 < x_1 < r_2, r_3 < x_2 < r_4\} \quad (5.1.2)$$

definiert. Mit Hilfe der Finiten-Differenzen Methode wird die exakte Lösung auf einem definierten diskreten Gitter Ω_{Grid} approximiert. Dafür werden die örtlichen Intervalle $[r_1, r_2]$ und $[r_3, r_4]$ in N_{x_1} beziehungsweise N_{x_2} äquidistante Intervalle unterteilt. Äquidistanz ist dabei keine zwingend notwendige Forderung, vereinfacht die spätere Handhabung allerdings deutlich. Für die Intervalllängen folgt demnach:

$$h_{x_2} = \frac{r_2 - r_1}{N_{x_1}} > 0 \quad h_{x_1} = \frac{r_4 - r_3}{N_{x_2}} > 0 \quad (5.1.3)$$

Das Approximationsgitter Ω_{Grid} ist folglich definiert als:

$$\Omega_{\text{Grid}} = \{(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \Omega | x_{1,i} = r_1 + ih_{x_1}, x_{2,j} = r_3 + jh_{x_2}, i, j \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega \quad (5.1.4)$$

Alle Punkte, die innerhalb des Arbeitsraumes liegen, also $(x_1, x_2) \in \Omega$ werden als innere Punkte bezeichnet. Dem gegenüber steht die Menge der Randpunkte

$$\begin{aligned} \partial\Omega_{\text{Grid}} = \\ \{(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \partial\Omega | x_{1,i} = r_1 + ih_{x_1}, x_{2,j} = r_3 + jh_{x_2}, i, j \in \mathbb{Z}\} \subset \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft eine Gitterpartitionierung eines zweidimensionalen Problems.

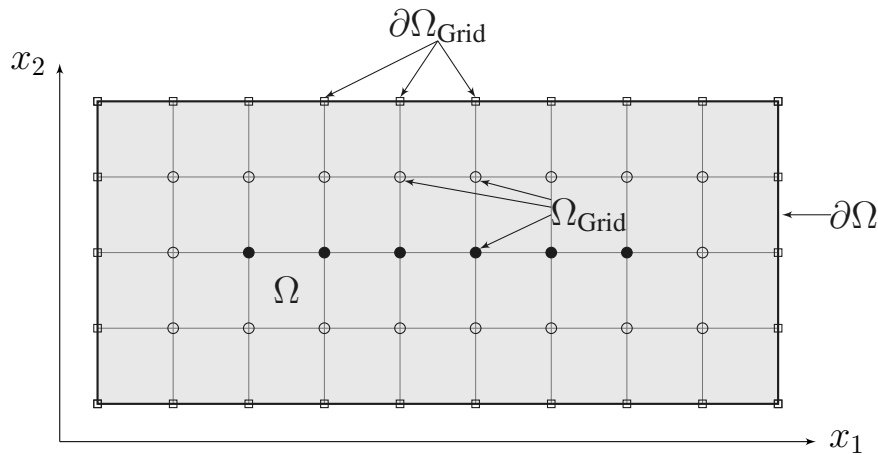


Abbildung 5.1: Festlegung der Gitterpunkte eines zweidimensionalen Problems (vgl. [129])

Die Randpunkte sind durch die rechteckigen Markierungen gekennzeichnet, die inneren Punkte durch Kreise. Dabei lassen sich des Weiteren randferne oder auch reguläre innere Punkte (ausgefüllte Kreise) und randnahe oder irreguläre innere Punkte (nicht gefüllte Kreise) unterscheiden [129]. An den Randpunkten werden die Funktionswerte $y(x_1, x_2)$ durch die Randbedingungen vorgegeben. Je nach Art der Problemstellung und der resultierenden partiellen Differentialgleichung können die Randbedingungen unterschiedlich formuliert sein. Bekannte Randbedingungen sind beispielsweise die [128, 129]

- Dirichlet-Randbedingung $y(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, die den Funktionswert am Rand direkt vorschreiben
- Neumann-Randbedingung $\frac{\partial y}{\partial n} = \varphi_2(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, die den Fluss in Normalenrichtung am Rand vorgibt
- Kombinierte-Randbedingung

Zur numerischen Approximation einer partiellen Differentialgleichung werden die diskreten Punkte im Gitter Ω_{Grid} mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung approximiert. Dabei lässt sich zwischen den Methoden der Vorwärts-/Rückwärtsdifferenz und dem zentralen Differenzenquotienten unterscheiden.

Für die erste Ableitung in Richtung einer Ortskoordinate x_i folgt daher mit der Vorwärtsdifferenz und den benachbarten Knotenpunkten:

$$\begin{aligned}
 y(x_i + \Delta x_i, \cdot) &= y(x_i, \cdot) + \Delta x_i \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \Delta x_i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + \frac{1}{6} \Delta x_i^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x_i^3} + \dots \\
 \frac{\partial y}{\partial x_i} &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - y(x_i, \cdot)}{\Delta x_i} - \frac{1}{2} \Delta x_i \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} - \frac{1}{6} \Delta x_i^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x_i^3} + \dots \\
 &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - y(x_i, \cdot)}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i)
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Die Fehlerordnung oder auch Konvergenzordnung $\mathcal{O}(\Delta x_i)$ der Approximation der ersten Ableitung durch Vorwärtsdifferenz ist demnach eins. Gleiches gilt leicht ersichtlich für eine Approximation mittels Rückwärtsdifferenz. Wird die erste Ableitung über den zentralen Differenzenquotienten approximiert, folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial x_i} &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - y(x_i - \Delta x_i, \cdot)}{2\Delta x_i} - \frac{1}{6} \Delta x_i^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x_i^3} + \dots \\
 &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - y(x_i - \Delta x_i, \cdot)}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2)
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta x_i^2)$. Für eine hinreichend kleine Schrittweite $0 < \Delta x_i < 1$ folgt demnach eine höhere Approximationsgüte bei der Verwendung des zentralen Differenzenquotienten. Für die zweite Ableitung folgt ebenfalls durch den zentralen Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - 2y(x_i, \cdot) + y(x_i - \Delta x_i, \cdot)}{\Delta x_i^2} - \frac{1}{12} \Delta x_i^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x_i^4} + \dots \\
 &= \frac{y(x_i + \Delta x_i, \cdot) - 2y(x_i, \cdot) + y(x_i - \Delta x_i, \cdot)}{\Delta x_i^2} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2)
 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Ebenso lassen sich gemischte oder höhere Ableitungen durch hintereinander ausgeführte zentrale Differenzenbildung herleiten.

Durch Einführung der Gitterstruktur und anschließender Diskretisierung entsteht somit aus der partiellen Differentialgleichung ein Gleichungssystem aus

$(N_{x_1} - 1)(N_{x_2} - 1)$ Gleichungen für alle $\hat{y}_{i,j} \approx y(x_{1,i}, x_{2,j})$. Dabei bezeichnet $\hat{y}_{i,j}$ die Approximation der partiellen Differentialgleichung am Punkt $(x_{1,i}, x_{2,j})$. Die Anordnung der Gitterpunkte und die Indizierung erfolgt lexikografisch reihen-/ oder spaltenweise, wie in Abbildung 5.2 dargestellt.

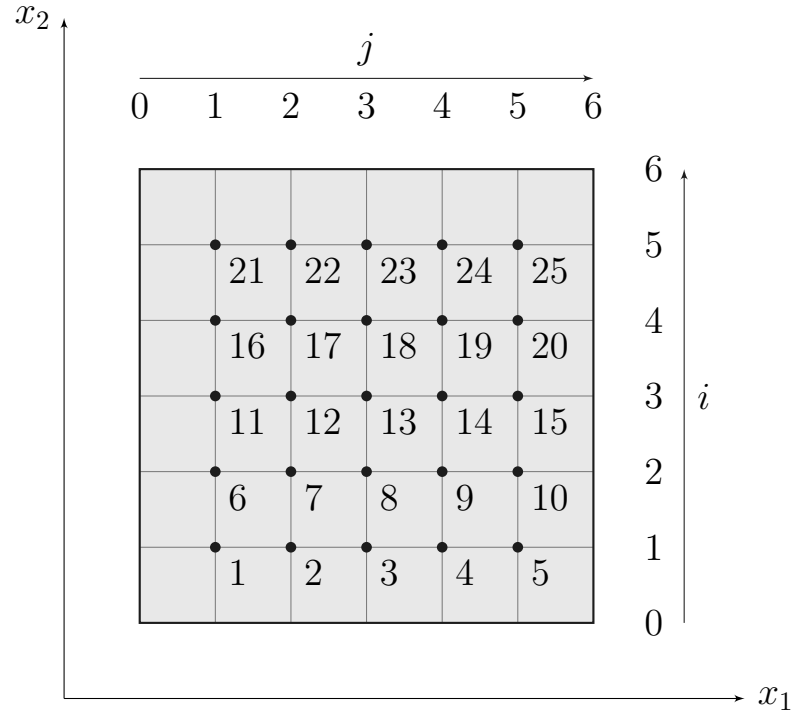


Abbildung 5.2: Lexikografische Indizierung der Gitterpunkte (vgl. [129])

Somit lässt sich der Lösungsvektor $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n_{\text{Grid}}})^T$ für den zweidimensionalen Fall wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \varrho_k &= \hat{y}_{i,j} \quad \text{mit } k = i + (j - 1)(N_{x_1} - 1) \\ i &= 1, 2, \dots, N_{x_1} - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_{x_2} - 1 \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

mit $n = (N_{x_1} - 1)(N_{x_2} - 1)$. Zu beachten ist, dass der Lösungsvektor nur die Lösungen der inneren Punkte enthält. Die Lösung an den Randpunkten werden durch die Randbedingungen vorgegeben. Es gilt demnach:

$$y(x_1, x_2) = \hat{y}_{i,j} = \phi(x_1, x_2) \quad i = 0, N_{x_1} \quad j = 0, N_{x_2} \quad (5.1.10)$$

Mit den obigen Definitionen lässt sich das Gleichungssystem nun in Matrix-Vektor Form zu $\mathbf{A}\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{a}$ zusammenfassen. Im Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

werden die eventuellen nichtlinearen Anteile, sowie die Randbedingungen zusammengefasst. Im Falle von Dirichlet-Randbedingungen folgt:

$$a_k = f(x_i, x_j) + \frac{1}{\Delta x_i^2} \sum_{(x_{1,a}, x_{j,b}) \in \Gamma} \varphi(x_{1,a}, x_{j,b}) \quad (5.1.11)$$

Sofern es sich um reguläre innere Punkte handelt, entfällt die Summe. Bei irregulären inneren Punkten enthält die Summe alle zum Gitterpunkt gehörenden benachbarten Randpunkte.

Die Matrix A ist stark problemspezifisch und lässt sich nicht verallgemeinert angeben. Sie enthält die Koeffizienten, die durch die Taylor-Reihenentwicklung für die Approximation der linearen Ableitungen entstehen. Wird die lexikografische Anordnung wie in Abbildung 5.2 gewählt, ist die Matrix A stets eine Tridiagonal-Töplitz-Matrix. Dies soll im Folgenden am Beispiel des Laplace-Operators, wie er auch in der Definition des generellen Strömungsproblems vorkommt, verdeutlicht werden. Der mathematische Laplace-Operator ist im eindimensionalen Fall definiert als:

$$\Delta y(x_1) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = f(x_1) \quad (5.1.12)$$

Im zweidimensionalen Fall lautet die Definition des Laplace-Operators:

$$\Delta y(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \quad (5.1.13)$$

Für die Diskretisierung im eindimensionalen Fall werden $N_{x_1} = 6$ Intervalle und im zweidimensionalen Fall in x_1 - und x_2 -Richtung $N_{x_1} = N_{x_2} = 4$ Intervalle festgelegt. Die Indizierung der approximierten Lösungen an den Gitterpunkten ist analog zu der bereits beschriebenen Vorgehensweise in Abbildung 5.3 dargestellt. Ebenso gilt für die Indizierung die Vorgabe aus (5.1.9).

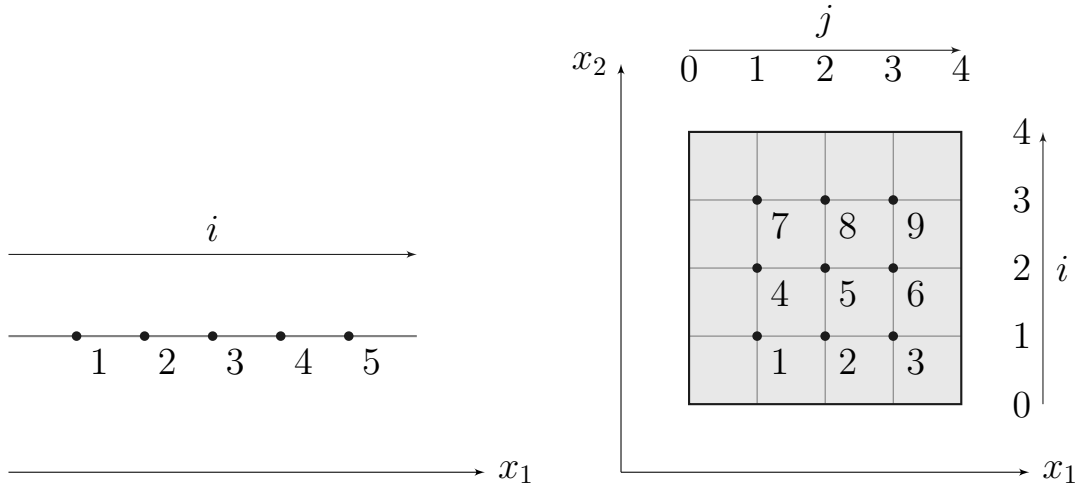


Abbildung 5.3: Indizierung der Gitterpunkte der approximierten Lösung eines eindimensionalen Problems (links) und eines zweidimensionalen Problems (rechts)

Der dreidimensionale Fall wird in Kapitel 6 eingeführt. Die Diskretisierung des eindimensionalen Laplace-Operators führt auf:

$$\frac{\partial^2 y(x_{1,i})}{\partial x_1^2} = \frac{y(x_{1,i+1} + \Delta x) - 2y(x_{1,i}) + y(x_{1,i-1} - \Delta x))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (5.1.14)$$

Da die Diskretisierungs-Schrittweite äquidistant gewählt wurde, kann für die Schrittweite konstant Δx gewählt werden. Ebenso wird der Fehlerterm $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ vernachlässigt. Somit entsteht mit der Einführung des approximierten Lösungsvektors $\boldsymbol{\varrho}$ nach Gleichung (5.1.9) ein Gleichungssystem aus $n_{\text{Grid}} = N_{x_1} - 1 = 5$ Gleichungen für die approximierten Lösungen $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_5)^T$. In Matrix-Vektor Form folgt:

$$\begin{bmatrix} f(x_{1,1}) \\ f(x_{1,2}) \\ f(x_{1,3}) \\ f(x_{1,4}) \\ f(x_{1,5}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \\ \varrho_4 \\ \varrho_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (5.1.15)$$

Die erste und die letzte Zeile der Matrix \mathbf{A} gehören zu irregulären inneren Punkten, daher ist der Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_5)^T$ notwendig, welcher den Einfluss der Randbedingung nach Gleichung (5.1.11) beinhaltet. Für eindimensionale Probleme entsteht somit eine Tridiagonale-Töplitz Matrix, bei der lediglich die Hauptdiagonale und die ersten Nebendiagonale mit Konstanten besetzt ist.

Etwas aufwendiger gestaltet sich der zweidimensionale Fall. Für die Diskretisierung des zweidimensionalen Laplace-Operators folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 y(x_{1,i}, x_{2,j})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x_{1,i}, x_{2,j})}{\partial x_2^2} \\
 &= \frac{y(x_{1,i+1} + \Delta x, x_{2,j}) - 2y(x_{1,i}, x_{2,j}) + y(x_{1,i-1} - \Delta x, x_{2,j})}{\Delta x^2} \quad (5.1.16) \\
 &+ \frac{y(x_{1,i}, x_{2,j+1} + \Delta x) - 2y(x_{1,i}, x_{2,j}) + y(x_{1,i}, x_{2,j-1} - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
 &= \frac{1}{\Delta x^2} [-4y(x_{1,i}, x_{2,j}) + y(x_{1,i+1} + \Delta x, x_{2,j}) + y(x_{1,i-1} - \Delta x, x_{2,j}) \\
 &+ y(x_{1,i}, x_{2,j+1} + \Delta x) + y(x_{1,i}, x_{2,j-1} - \Delta x)] + \mathcal{O}(\Delta x^2)
 \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall wird der approximierte Lösungsvektor nach Gleichung (5.1.9) eingeführt. Für die lexikografische Indizierung nach Abbildung 5.3 folgt ein Gleichungssystem aus $(N_{x_1} - 1)(N_{x_2} - 1) = 9$ Gleichungen. Somit folgt für die Matrix-Vektor Form $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{a}$ mit:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (5.1.17)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_{1,1}, x_{2,1}) \\ f(x_{1,1}, x_{2,2}) \\ f(x_{1,1}, x_{2,3}) \\ f(x_{1,2}, x_{2,1}) \\ f(x_{1,2}, x_{2,2}) \\ f(x_{1,2}, x_{2,3}) \\ f(x_{1,3}, x_{2,1}) \\ f(x_{1,3}, x_{2,2}) \\ f(x_{1,3}, x_{2,3}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_9 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{\varrho} = \begin{bmatrix} \varrho_1 & \dots & \varrho_9 \end{bmatrix}^T$$

Die Matrix \mathbf{A} lässt sich durch ein verallgemeinertes Schema für beliebige Intervallzahlen ebenfalls darstellen als:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} T & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & T & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & T & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (5.1.18)$$

Für die Diskretisierung des zweidimensionalen Laplace-Operators lässt sich die Matrix \mathbf{A} als Blocktridiagonale Matrix aus Einheitsmatrizen der Größe $(N_{x_1} - 1) \times (N_{x_1} - 1)$ sowie $N_{x_2} - 1$ Blockmatrizen \mathbf{T} der Größe $(N_{x_1} - 1) \times (N_{x_1} - 1)$ zusammensetzen.

Bislang wurde die approximative Lösung einer statischen partiellen Differentialgleichung in Form eines Gleichungssystems in Matrix-Vektor Darstellung eingeführt. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus allerdings auf dynamischen Systemen, was bedeutet, dass neben den Ortsableitungen zusätzlich Ableitungen nach der Zeit in der partiellen Differentialgleichung vorkommen. Prinzipiell lassen sich diese zeitlichen Ableitungen ebenfalls über die bereits beschriebenen Differenzenformeln diskretisieren. Bei dieser Vorgehensweise resultiert ein diskretes dynamisches Modell, welches in Matrix-Vektor Form

dem diskreten Zustandsraummodell konzentriert-parametrischer Systeme ähnelt. Alternativ kann die zeitliche Ableitung allerdings auch beibehalten werden, sodass ein zeitkontinuierliches dynamisches Modell entsteht. An der prinzipiellen Vorgehensweise ändert sich daher nichts. Als Beispiel folgt für ein dynamisches zweidimensionales System

$$\frac{\partial y(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \quad (5.1.19)$$

mit der örtlichen Diskretisierung des Laplace-Operators nach Gleichung (5.1.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x_{1,i}, x_{2,j}, t)}{\partial t} = & \frac{1}{\Delta x^2} [-4y(x_{1,i}, x_{2,j}, t) + y(x_{1,i+1} + \Delta x, x_{2,j}, t) \\ & + y(x_{1,i-1} - \Delta x, x_{2,j}, t) + y(x_{1,i}, x_{2,j+1} + \Delta x, t) \\ & + y(x_{1,i}, x_{2,j-1} - \Delta x, t)] + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Analog zum statischen Fall wird der Lösungsvektor $\boldsymbol{\varrho}$ mit dem Gitter aus Abbildung 5.3 eingeführt. Leicht ersichtlich ändert sich an der Systemmatrix \mathbf{A} im dynamischen Fall nichts, da diese lediglich die Koeffizienten der örtlichen Diskretisierung enthält. Sofern es sich nicht um ein autonomes System handelt, lässt sich analog zur gesuchten Variablen y mit der örtlichen Diskretisierung der Eingangsvariablen u verfahren. Die resultierenden Koeffizienten lassen sich ebenfalls in einer Matrix \mathbf{B} zusammenfassen. Somit lässt sich Gleichung (5.1.20) in Matrix-Vektor Form für alle inneren Gitterpunkte schreiben als:

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{a} \quad (5.1.21)$$

Es resultiert ein System aus ordinären Differentialgleichungen, vergleichbar mit der Zustandsraumformulierung konzentriert-parametrischer Systeme. Bislang wurden sämtliche Randbedingungen sowie nichtlinearen Einflüsse im Vektor \mathbf{a} zusammengefasst. Um diese nun zu berücksichtigen, wird im Folgenden die Erweiterung der Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme für örtlich-verteilte Systeme vorgestellt.

5.2 Modellstruktur örtlich verteilter Takagi-Sugeno Fuzzy Systeme

Bislang wurden die nichtlinearen Einflüsse der partiellen Differentialgleichungen vernachlässigt beziehungsweise nicht weiter berücksichtigt. Für eine dynamische nichtlineare partielle Differentialgleichung gilt im Allgemeinen:

$$\frac{\partial y(\cdot, t)}{\partial t} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{\text{Dim}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{Dim}}} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y(\cdot, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Dim}}} b_{ij}(x) \frac{\partial y(\cdot, t)}{\partial x_i}}_{\text{Linearer Teil}} + f_{\text{NL}}(\cdot) \quad (5.2.1)$$

Die Funktion $f_{\text{NL}}(\cdot)$ kann beliebige nichtlineare Funktionen der Lösungsvariablen y oder einer partiellen örtlichen Ableitung beliebiger Ordnung enthalten. Neben der örtlichen Diskretisierung des linearen Teils analog zu Abschnitt 5.1 kann auch der nichtlineare Teil einer solchen Diskretisierung unterzogen werden. Leicht ersichtlich resultiert daraus ein Satz aus n_{Grid} nichtlinearen ordinären Differentialgleichungen, der sich in Matrix-Vektor Form schreiben lässt als:

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{n}(\boldsymbol{\varrho}(t)) + \mathbf{a} \quad (5.2.2)$$

wobei der nichtlineare Anteil $\mathbf{n}(\boldsymbol{\varrho}(t)) = [f_{\text{NL}}(\varrho_1), f_{\text{NL}}(\varrho_2), \dots, f_{\text{NL}}(\varrho_{n_{\text{Grid}}})]^T$ durch die Diskretisierung an jedem Gitterpunkt nun definitiv in jeder Zeile besetzt ist. Dies ist ein entscheidender Unterschied zum konzentriert-parametrischen Fall. Im konzentriert-parametrischen Fall treten häufig lediglich bestimmte Zustände in nichtlinearen Zusammenhängen auf. Wird beispielsweise das inverse Pendel mit den Zuständen Winkel x_1 und Winkelgeschwindigkeit x_2 beschrieben, tritt in einer weitverbreiteten Modellbeschreibung des inversen Pendels nur der Winkel x_1 im Rahmen trigonometrischer Funktionen nichtlinear auf [65]. Die vereinzelt vorkommenden nichtlinearen Funktionen lassen sich dann durch die in Abschnitt 4.4 beschriebene Methodik in praktikable TS Fuzzy Systeme, entweder durch

Nutzung des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatzes oder durch Approximation mittels linearer Teilsysteme, transformieren.

Im nun vorliegenden Fall örtlich verteilter Systeme können zwar, ähnlich zum konzentriert-parametrischen Fall, auch einzelne oder mehrere nichtlineare Funktionen in den Modellgleichungen auftreten, diese sind allerdings durch ihre Ortsabhängigkeit gekennzeichnet. Durch die örtliche Diskretisierung wird jede nichtlineare Funktion an jedem Gitterpunkt definiert sein und somit in allen Gleichungen des Gleichungssystems des approximierten Lösungsvektors $\boldsymbol{\varrho}$ vorkommen. Es folgt daher, dass die nichtlinearen Funktionen, die durch die TS Fuzzy Methodik dargestellt werden sollen:

- in jeder Zeile der Matrix-Vektor Form auftreten
- in jeder Zeile die gleiche nichtlineare Struktur aufweisen
- für jede Zeile einen anderen Wert annehmen, da die Auswertung der nichtlinearen Funktion vom Funktionswert am jeweiligen Gitterpunkt abhängt.

Das Resultat der angeführten Punkte ist, dass die Ordnung des TS Fuzzy Systems bei Erhöhung der Anzahl an Gitterpunkten rasant ansteigt. Bei der Anwendung des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatzes, bei der jeder Nichtlinearität zwei Teilmodelle und Zugehörigkeitsfunktionen zugewiesen werden, resultiert beispielsweise folgendes TS Fuzzy System für ein örtlich diskretisiertes nichtlineares örtlich verteiltes System:

$$\begin{aligned}
 \dot{\boldsymbol{\varrho}}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dots \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mu_{1,i}(\varrho_1) \cdot \mu_{2,j}(\varrho_2) \cdot \dots \cdot \mu_{n_{\text{Grid}}-1,k}(\varrho_{n_{\text{Grid}}-1}) \\
 &\quad \cdot \mu_{n_{\text{Grid}},l}(\varrho_{n_{\text{Grid}}}) [\mathbf{A}_{i,j,\dots,k,l} \cdot \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_{i,j,\dots,k,l} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{a}_{i,j,\dots,k,l}] \\
 &= \sum_{i=1}^{N_R} \eta(\boldsymbol{\varrho}) [\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{a}_i] \tag{5.2.3}
 \end{aligned}$$

Somit folgt pro nichtlinearer Funktion in der örtlich verteilten Modellgleichung eine TS Fuzzy Ordnung von $N_R = 2^{n_{\text{Grid}}}$. Zur Verdeutlichung

der Komplexität: Bei einer Partitionierung nach Abbildung 5.3 mit neun Gitterpunkten wäre die Anzahl an linearen Teilsystem oder TS Fuzzy Regeln bereits bei $N_R = 2^9 = 512$. Für ein ähnlich partitioniertes dreidimensionales Problem wie es später bei der Raumklimaverteilung benötigt wird, mit $n_{\text{Grid}} = 3 \times 3 \times 3 = 27$ inneren Gitterpunkten resultieren $N_R = 2^{27} = 134217728$ TS Fuzzy Regeln. Somit ist weder eine rechnerische Praktikabilität gegeben noch eine LMI-basierte Reglerauslegung vertretbar. Bei der approximativen Modellierung wird dieses Phänomen noch verstärkt, da die Aufteilung der Nichtlinearität nicht auf zwei Teilmodelle beschränkt ist, wie im Fall der Sektor-Nichtlinearitäten. Eine Modellreduktion ist daher für die Anwendung der TS Fuzzy Theorie unerlässlich. Da jede Zeile der Matrix-Vektor Form aus Gleichung (5.2.2) eine für sich alleinstehende Berechnung des dynamischen Verhaltens an einem bestimmten Gitterpunkt darstellt, wird zur Modellreduktion die Matrix-Vektor Form zunächst in separierter Form angegeben:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varrho}_1(t) &= \mathbf{A}^{(1,\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}^{(1,\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_1(t)) + a^{(1)} \\
 \dot{\varrho}_2(t) &= \mathbf{A}^{(2,\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}^{(2,\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_2(t)) + a^{(2)} \\
 &\vdots \\
 \dot{\varrho}_{n_{\text{Grid}}-1}(t) &= \mathbf{A}^{(n_{\text{Grid}}-1,\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}^{(n_{\text{Grid}}-1,\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_{n_{\text{Grid}}-1}(t)) + a^{(n_{\text{Grid}}-1)} \\
 \dot{\varrho}_{n_{\text{Grid}}}(t) &= \mathbf{A}^{(n_{\text{Grid}},\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}^{(n_{\text{Grid}},\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_{n_{\text{Grid}}}(t)) + a^{(n_{\text{Grid}})}
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Dabei symbolisiert der hochstehende Index (i, \cdot) das der i -te Zeilenvektor der betreffenden Matrix oder des betreffenden Vektors verwendet wird. Nun lässt sich jedes der einzelnen n_{Grid} Modelle einzeln als TS-Fuzzy System formulieren, da die Auswertung jeder nichtlinearen Funktion für die einzelnen Gitterpunkte jeweils nur einfach vorkommt. Es folgt daher wieder für den Fall der Sektor-Nichtlinearitäten (die approximative Modellierung kann analog durchgeführt werden):

$$\begin{aligned}
\dot{\varrho}_1(t) &= \sum_{i=1}^2 \eta_i(\varrho_1) \left[\mathbf{A}_i^{(1,\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i^{(1,\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_1(t)) + a_i^{(1)} \right] \\
\dot{\varrho}_2(t) &= \sum_{i=1}^2 \eta_i(\varrho_2) \left[\mathbf{A}_i^{(2,\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i^{(2,\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_2(t)) + a_i^{(2)} \right] \\
&\vdots \\
\dot{\varrho}_{n_{\text{Grid}}}(t) &= \sum_{i=1}^2 \eta_i(\varrho_{n_{\text{Grid}}}) \left[\mathbf{A}_i^{(n_{\text{Grid}},\cdot)} \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i^{(n_{\text{Grid}},\cdot)} \mathbf{u} + \mathbf{n}(\varrho_{n_{\text{Grid}}}(t)) + a_i^{(n_{\text{Grid}})} \right]
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

An dieser Stelle folgen durch die TS Fuzzy Methodik n_{Grid} dynamische Gleichungen mit der gewichteten Summe aus je $N_R = 2$ Teilmodellen (bei der Anwendung des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatzes). Mit Hilfe des Hadamard-Produktes [130] lässt sich nun wieder eine kompaktere Schreibweise in Matrix-Vektor Form erzielen. Das Hadamard-Produkt ist eine elementweise Multiplikation zweier Matrizen oder Vektoren (siehe Abbildung 5.4).

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ a_n \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Abbildung 5.4: Schema des Hadamard-Produktes

Mit der Zusammenfassung der Gleichungen und Einführung des Hadamard-Produktes in Gleichung (5.2.5) folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varrho}_1(t) \\ \dot{\varrho}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\varrho}_{n_{\text{Grid}}-1}(t) \\ \dot{\varrho}_{n_{\text{Grid}}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} \eta_i(\varrho_1) \\ \eta_i(\varrho_2) \\ \vdots \\ \eta_i(\varrho_{n_{\text{Grid}}-1}) \\ \eta_i(\varrho_{n_{\text{Grid}}}) \end{bmatrix} \odot [\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i] \tag{5.2.6}$$

Da die Auswertung der rechten Seite des Hadamard-Produktes $\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i$ ebenfalls einen $(n_{\text{Grid}} \times 1)$ Vektor zur Folge hat, ist das Hadamard Produkt wohl definiert. In Kurzform folgt demnach:

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}}(t) = \sum_{i=1}^{N_R} \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varrho}(t)) \odot [\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{a}_i] \quad (5.2.7)$$

Entscheidend bei diesem örtlich verteilten TS Fuzzy System ist an dieser Stelle, dass die Gültigkeit der Teilmodelle nun nicht mehr durch einen Skalar η_i beschrieben wird, sondern durch einen Vektor $\boldsymbol{\eta}_i$ der die Gültigkeit der Teilmodelle an jedem Gitterpunkt unabhängig voneinander bewertet. Dadurch lässt sich die Modellordnung um ein vielfaches reduzieren, denn die Modellordnung ist nun unabhängig von der Anzahl der Gitterpunkte. Für jede zu approximierende nichtlineare Funktion hängt die Modellordnung nun lediglich von der Approximationsgüte ab, das heißt wie viele Teilsysteme pro nichtlinearer Funktion erwünscht sind. Beim Sektor-Nichtlinearitäten Ansatz ist die Zahl der Fuzzy Regeln pro nichtlinearer Funktion beispielsweise konstant $N_R = 2$, egal wie fein die örtliche Partitionierung gewählt wird, wohingegen sie beim standardmäßigen Ansatz stark mit der Anzahl der Gitterpunkte angestiegen ist.

Die Vorgehensweise zur Gewinnung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme soll im Folgenden an einem Fallbeispiel sowohl als exakte Modellrepräsentation über Sektor-Nichtlinearitäten, als auch approximativ gezeigt werden.

5.2.1 Analytische Modellbildung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme

In [131] finden sich zahlreiche Beispiele für nichtlineare örtlich verteilte Systeme. Eines davon beschreibt die Wärmeverteilung auf einem langen dünnen Stab. Der Stab befindet sich dabei in einem, mit Flüssigkeit gefüllten, Reaktor. Zudem findet eine exotherme Reaktion von Stab und Flüssigkeit statt, dass heißt, der Stab wird sich erwärmen. Zur Manipulation der Temperatur des Stabes kann kühle Flüssigkeit in den Reaktor zugegeben werden. Die zugrundeliegende Modellgleichung wird in [131] für eine eindimensionale

Betrachtung wie folgt angegeben:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \beta_T e^{-\frac{\gamma}{1+y(x, t)}} + \beta_U (b(x)u(t) - y(x, t)) - \beta_T e^{-\gamma} \quad (5.2.8)$$

Dabei bezeichnet $y(x, t)$ die Temperatur zur Zeit t am Ort x , β_T bezeichnet die Wärme der stattfindenden exothermen Reaktion, β_U ist ein Wärmeübertragungskoeffizient und u beschreibt die Temperatur des kühlenden Mediums als Stellgröße. Die örtlich verteilte Wirkung der Stellgröße wird durch die lediglich ortsabhängige Funktion $b(x)$ beschrieben. Für diese Funktion gilt $b(x) = 0, 1\beta_U \cos(0, 1x)$. Die geometrischen Ausmaße seien mit $\Omega = \{x | r_1 < x < r_2\} = \{x | 0 < x < \pi\}$ gegeben. Zudem gelten am geometrischen Rand des Problems Dirichlet-Randbedingungen, dass heißt:

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (5.2.9)$$

Im ersten Schritt wird nun die örtliche Diskretisierung wie zuvor beschrieben durchgeführt. Dabei kann entweder die örtliche Schrittweite oder die Anzahl der Intervalle festgelegt werden. Für die Anzahl der Intervalle soll im Folgenden $N_x = 7$ gelten, dass heißt es entstehen $n_{\text{Grid}} = N_x - 1 = 6$ innere Gitterpunkte, wovon 4 Punkte reguläre Punkte sind. Die Schrittweite ergibt sich aus:

$$\Delta x = \frac{r_2 - r_1}{N_x} = \frac{\pi - 0}{7} = \frac{\pi}{7} \quad (5.2.10)$$

Das Gitter ist demnach festgelegt durch:

$$\Omega_{\text{Grid}} = \{x \in \Omega | x = r_1 + i\Delta x, i \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega \quad (5.2.11)$$

Die Anwendung der Differenzenformeln auf das eingeführte Gitter führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} = & \underbrace{\frac{y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)}{\Delta x^2} + \beta_U (b_i u(t) - y_i(t))}_{\text{linearer Teil}} \\ & \underbrace{- \beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right)}_{\text{nichtlinearer Teil}} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Dabei kann Die Ortsabhängigkeit der Funktion $b(x)$ ebenfalls durch Einsetzen der Ortskoordinaten ersetzt werden. Es resultiert somit ein Satz von $i = 1, \dots, n_{\text{Grid}}$ nichtlinearen Differentialgleichungen. Zwar lässt sich der nichtlineare Teil auch in einen rein nichtlinearen Teil (erste e -Funktion) und einen affinen Teil (zweite e -Funktion) aufteilen, allerdings wird die spätere Reglerauslegung vereinfacht, wenn beide zu einem nichtlinearen Teil zusammengefasst werden. Für den Sektor-Nichtlinearitäten Ansatz hat dieses Vorgehen keinerlei Nachteile. Um das nichtlineare Modell in Matrix-Vektor Form schreiben zu können, muss noch darauf geachtet werden, dass an den irregulären inneren Punkten $y_1(t)$ und $y_6(t)$ kein linker- bzw. rechter innerer Punkt als Nachbarpunkt vorhanden ist. Hier greifen die Dirichlet-Randbedingungen. Zudem ist darauf zu achten, dass neben der zweiten örtlichen Ableitung auch noch der Term $\beta_U y_i$ vorhanden ist. Daher folgt für die Koeffizienten an dieser Stelle $\varsigma = -\frac{2}{\Delta x^2} - \beta_U$. In Matrix-Vektor Form folgt demnach (aus Platzgründen ohne Zeitargument):

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varsigma & \frac{1}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varsigma & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_u b_1 \\ \beta_u b_2 \\ \vdots \\ \beta_u b_5 \\ \beta_u b_6 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} f_{NL}(y_1) \\ f_{NL}(y_1) \\ \vdots \\ f_{NL}(y_5) \\ f_{NL}(y_6) \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

mit $f_{NL}(y_i(t)) = -\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right)$. Um nun zu einem örtlich verteilten TS Fuzzy System zu gelangen, wird die nichtlineare Funktion etwas modifiziert:

$$f_{NL}(y_i(t)) = -\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right) = \frac{-\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right) \cdot y_i(t)}{y_i(t)} \quad (5.2.14)$$

Hierdurch lässt sich erreichen, dass der nichtlineare Teil in die dann nichtlineare Systemmatrix $A(x)$ verschoben und im Anschluss durch gewichtete Kombinationen linearer Systemmatrizen als TS Fuzzy System formuliert

werden kann. Dafür wird der Koeffizient ς erweitert zur Koeffizientenfunktion:

$$\tilde{\varsigma}(y_i) = -\frac{2}{\Delta x^2} - \beta_U + f_{NL}(y_i(t)) = -\frac{2}{\Delta x^2} - \beta_U - \frac{\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right)}{y_i(t)} \quad (5.2.15)$$

und es folgt für die nichtlineare Matrix-Vektor Form mit dem Lösungsvektor $\boldsymbol{\varrho}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_5(t) \\ \dot{y}_6(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\varsigma}(y_1) & \frac{1}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & \tilde{\varsigma}(y_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\varsigma}(y_5) & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x^2} & \tilde{\varsigma}(y_6) \end{bmatrix}}_{A(\boldsymbol{\varrho})} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_5(t) \\ y_6(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varrho}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_u b_1 \\ \beta_u b_2 \\ \vdots \\ \beta_u b_5 \\ \beta_u b_6 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad (5.2.16)$$

Ausgehend von dem nun vorliegenden Modell kann die örtlich verteilte TS Fuzzy Struktur wie zuvor beschrieben generiert werden, indem die nichtlineare Funktion in der Koeffizientenfunktion $\tilde{\varsigma}(y_i)$ durch die TS Fuzzy Repräsentation ersetzt wird. Gleichung (5.2.16) mit dem örtlich verteilten Lösungsvektor $\boldsymbol{\varrho}$ lässt sich entweder durch Anwendung des Sektor-Nichtlinearitäten Ansatz exakt beschreiben oder durch Linearisierung um ausgewählte Arbeitspunkte approximieren. Zunächst soll die exakte Systemdarstellung gezeigt werden. Dafür sind zunächst die Sektoren festzulegen. Folgende Funktion gilt es zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \Lambda(y_i) = f_{NL}(y_i) &= \frac{\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right)}{y_i(t)} \\ &= \mu_1(y_i) \cdot \Lambda_{max} + \mu_2(y_i) \cdot \Lambda_{min} \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Der Arbeitsbereich, in dem das TS Fuzzy Modell gültig sein soll, wird festgelegt durch die Scheduling-Variable $z_i(t) = y_i(t) \in [-0.9, 30]$. Der in diesem Arbeitsbereich resultierende Verlauf der Sektor-Funktion ist in

Abbildung 5.5 dargestellt. Aus dem Verlauf lassen sich die Sektor-Grenzen mit $\Lambda_{min} = 0$ und $\Lambda_{max} = 7$ festlegen.

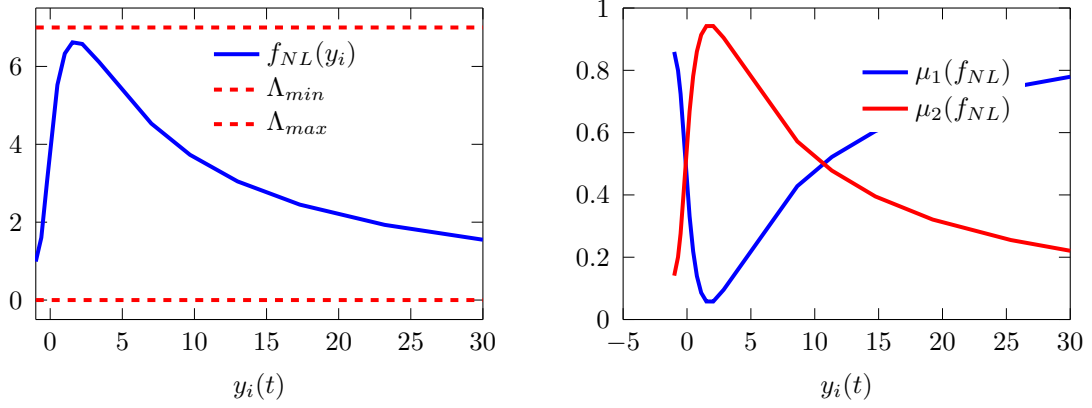


Abbildung 5.5: Verlauf der Sektor-Funktion (links) und der Fuzzy-Gültigkeitsfunktionen (rechts)

Die Gültigkeitsfunktionen sind für das verteilte TS Fuzzy System somit wie folgt definiert:

$$\mu_1(z_i) = \frac{\Lambda(z_i) - \Lambda_{min}}{\Lambda_{max} - \Lambda_{min}} \quad \mu_2(z_i) = \frac{\Lambda_{max} - \Lambda(z_i)}{\Lambda_{max} - \Lambda_{min}} = 1 - \mu_1(z_i) \quad (5.2.18)$$

und ebenfalls in Abbildung 5.5 dargestellt. Um das System (5.2.12) in TS Fuzzy Form zu schreiben, gelten mit der Sektor-Definition die Folgenden Matrizen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \varsigma - \Lambda_{max} & \frac{1}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma - \Lambda_{max} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varsigma - \Lambda_{max} & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma - \Lambda_{max} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \varsigma - \Lambda_{min} & \frac{1}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma - \Lambda_{min} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varsigma - \Lambda_{min} & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma - \Lambda_{min} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Eine exakte Repräsentation von Gleichung (5.2.12) ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned}\dot{\varrho}(t) &= \eta_1(\varrho) \odot [A_1 \varrho + B_1 u] + \eta_2(\varrho) \odot [A_2 \varrho + B_2 u] \\ &= \sum_{i=1}^2 \eta_i(\varrho) \odot [A_i \varrho + B_i u]\end{aligned}\quad (5.2.20)$$

Abbildung 5.6 zeigt die Entwicklung des autonomen Systems im offenen

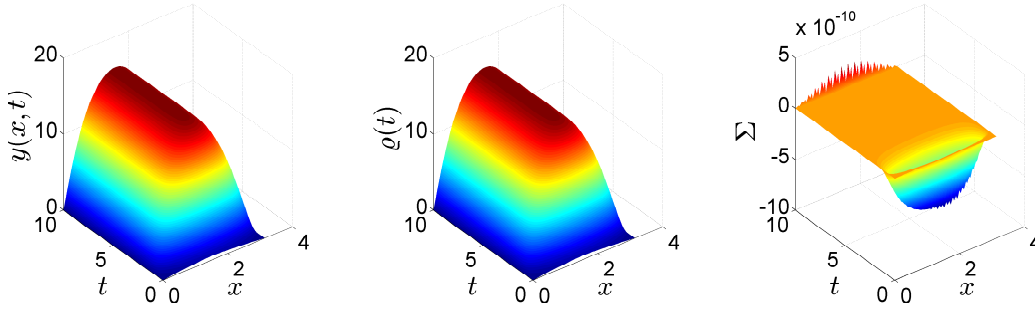


Abbildung 5.6: Simulation des offenen Kreises des realen Systems (links), der TS Fuzzy Darstellung (mitte) und des Fehlersignals (rechts)

Kreis (Eingangssignal $u = 0$). Im linken Bild ist die Lösung der PDE über die *Matlab PDE Toolbox* dargestellt, welche im Folgenden als Referenz dient. Das mittlere Bild zeigt die Approximation der PDE durch das Takagi-Sugeno Fuzzy System aus Gleichung (5.2.20) mit $N_x = 7$ Intervallen. Als Anfangsbedingung wurde die Funktion:

$$y(x, 0) = 0,5 \cdot \sin(x) \quad (5.2.21)$$

gewählt. Erkennbar handelt es sich dabei nicht um einen instabilen Arbeitspunkt, da das System im offenen Kreis andere Werte annimmt. Im rechten Bild ist das Fehlersignal zwischen dem TS Fuzzy System und der Lösung durch die Verwendung der *PDE Toolbox* gezeigt. Dabei wurde der rein örtliche Diskretisierungsfehler bereits abgezogen, indem der Fehler des nicht-linearen diskretisierten Modells (5.2.12) subtrahiert wurde. Das verbleibende Fehlersignal ist also nur auf die TS Fuzzy Formulierung zurückzuführen. Für das Fehlersignal gilt:

$$E_{\text{PDE}}(t) = \underline{y}(t) - \varrho(t) \quad (5.2.22)$$

wobei mit $\underline{y}(\Omega_{\text{Grid}}, t) \subset \underline{y}(\Omega, t)$ nur die Werte von $y(x, t)$ ausgewertet wurden, zu denen es auch örtlich passende Werte im Lösungsvektor $\underline{\varrho}(t)$ gibt. Diese Einschränkung ist nötig, da die örtliche Diskretisierung der *PDE Toolbox* um ein vielfaches feiner ist, als die Approximation mit $N_x = 7$ Intervallen.

Auf das gewonnene TS Fuzzy System lassen sich nun die LMI-Bedingungen aus Abschnitt 4.5 anwenden. Hier werden beispielhaft die Bedingungen zur einfachen Stabilität \mathbf{LMI}_{K1} verwendet, um den Regelkreis durch PDC-Zustandsregler $K_i \in \mathbb{R}^{N_x-1 \times 1}$ im Ursprung zu stabilisieren. Da das System nur eine Stellgröße aufweist, lässt sich auch nur ein bestimmter örtlicher Punkt als Referenz für die Regelung verwenden. Die einfache PDC-Reglerstruktur wird zudem wie in Abschnitt 4.5.2 beschrieben erweitert, sodass der Regelkreis einem Sollwert w folgt. Beide Regelungen betrachten lediglich einen speziellen örtlichen Punkt als Regelgröße. Als letzten Versuch werden alle inneren Gitterpunkte als relevante Regelgrößen betrachtet. Da es nun nicht möglich ist, stationäre Genauigkeit für alle Regelgrößen mit einer einzigen Stellgröße zu erzielen, wird die quadratische Optimierung aus Abschnitt 4.5.2 angewendet. Hierbei werden für alle Gitterpunkte erreichbare Sollwerte ermittelt, welche es einzuregeln gilt. Diese berechneten Sollwerte minimieren die technisch mögliche Abweichung vom erwünschten Sollwert. Abbildung 5.7 zeigt die erzielten Ergebnisse für die Regelgrößen $y(x, t)$ (links) und das Stellsignal $u(t)$ (rechts).

Im oberen Bild ist die Stabilisierung des Systems im Ursprung gezeigt. Für den zweiten Versuch wurden sprungförmige Sollwertänderung vorgenommen. Als Referenzwert und damit als Regelgröße dient ein innerer Gitterpunkt bei $x = \frac{\pi}{2}$. Die Ergebnisse zeigen, dass sich durch den vorgeschlagenen Ansatz die Sollwertfolge für den Punkt $y(\frac{\pi}{2}, t)$ erzielen lässt. Die Projektion auf die z-Achse zeigt den Verlauf des Referenzwertes bei $y(\frac{\pi}{2}, t)$ (blaue Linie) und die vorgegebenen Sollwerte (rote gestrichelte Linie). Im unteren Bild ist der Fall dargestellt, dass das System lediglich eine Stellgröße aufweist, aber alle Gitterpunkte einem Sollwert folgen sollen. Hier

wird für jeden inneren Gitterpunkt $y(x, t)$ der selbe Sollwert $w(x, t) = 5$, beziehungsweise in diskretisierter Form $w_i(t) = 5$, angesetzt. Aufgrund der technischen Gegebenheiten, die durch die physikalische Definition des Systems und die Randbedingungen gegeben sind, lässt es sich nicht erreichen, dass alle inneren Gitterpunkte mit lediglich einer Stellgröße ihrem Sollwert folgen. Durch die quadratische Optimierung aus Abschnitt 4.5.2 werden die Sollwerte derart berechnet, dass deren quadratische Abweichung von ihrem eigentlich erwünschten Wert, minimiert wird.

Daraus resultiert, wie im unteren Bild aus Abbildung 5.7 dargestellt, dass die mittleren Gitterpunkte zwar etwas über dem Sollwert liegen, die summierten Abweichungen allerdings minimiert werden. Die Sollwerte sind als rote gestrichelte Linie eingezeichnet.

5.2.2 Approximative Modellierung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme

Im vorherigen Abschnitt wurde die exakte Transformation einer bereits örtlich diskretisierten partiellen Differentialgleichung in ein örtlich verteiltes TS Fuzzy System vorgestellt. Für die datengetriebene Modellbildung, wie sie in Kapitel 6 am Beispiel des Raumklimas angewendet werden soll, ist die approximative Modellierung anzuwenden, da die Modellparameter unbekannt sind. Im Folgenden Abschnitt soll die approximative Modellierung örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme durch Linearisierung vorgestellt werden. Das Vorgehen im Rahmen der vollständigen Systemidentifikation wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Die Aufgabenstellung für die approximative Modellierung ist es nun, das nichtlineare System aus Gleichung 5.2.8, beziehungsweise die mittels des Gitters Ω_{Grid} diskretisierte Form, durch lineare Teilsysteme anzunähern. Ausgangspunkt ist also die bereits bekannte Gleichung 5.2.12, die zur besseren Lesbarkeit noch einmal wiederholt wird:

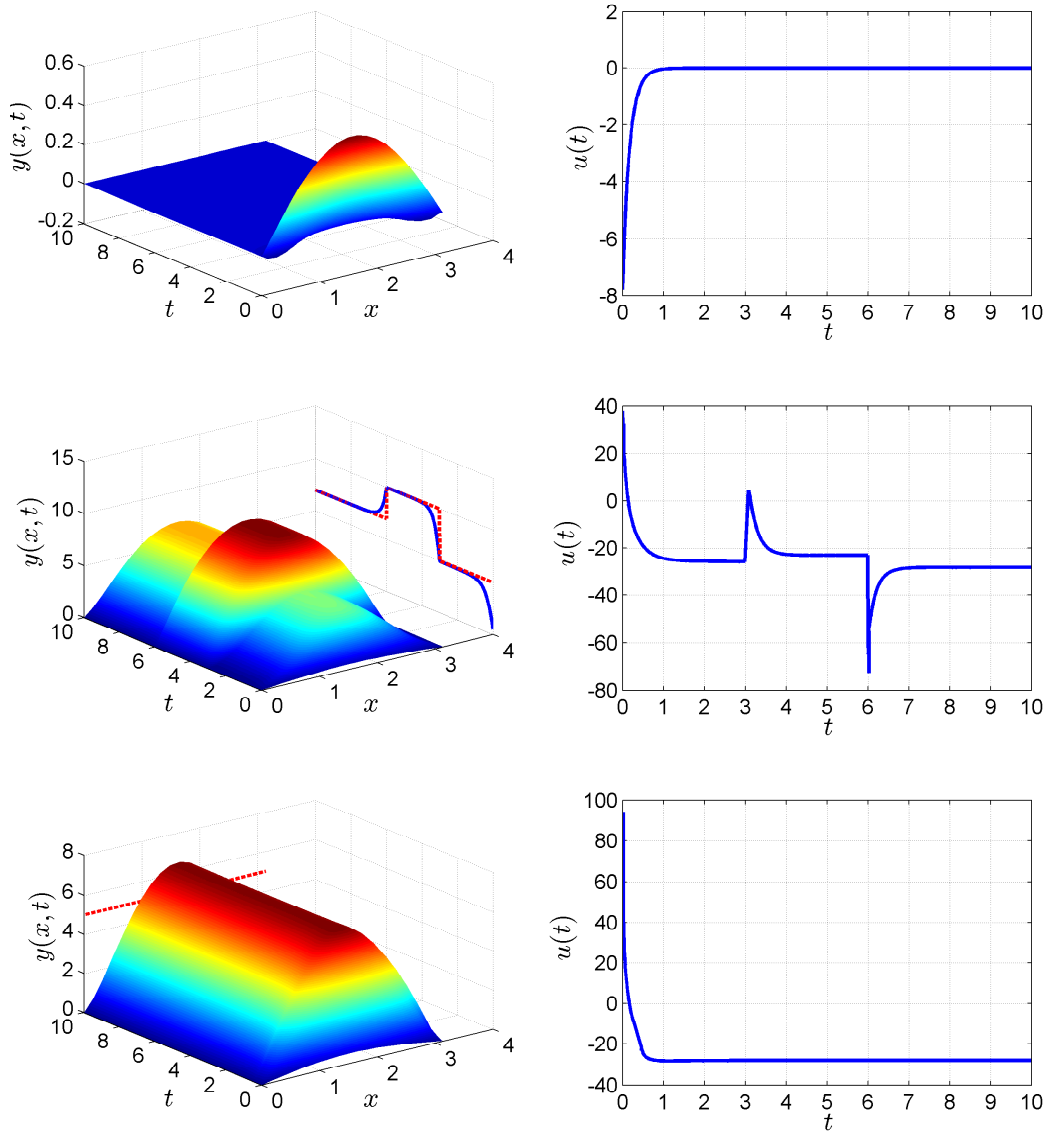


Abbildung 5.7: Geregeltes System mit Stabilisierung im Ursprung (oben), Sollwertefolge mit sprungförmiger Vorgabe an einem definierten Ort $x = \pi/2$ (mitte) und quadratisch optimale Anpassung der Sollwerte bei einer Stellgröße und mehreren Regelgrößen $w_i = 5$ (unten). Darstellung jeweils mit Systemausgang (links) und Stellsignal (rechts)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} = & \underbrace{\frac{y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)}{\Delta x^2} + \beta_U(b_i u(t) - y_i(t))}_{\text{linearer Teil}} \\
 & \underbrace{-\beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right)}_{\text{nichtlinearer Teil}}
 \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Um die nichtlineare orts- und zeitabhängige Funktion:

$$f_{\text{NL}}(y_i(t)) = \beta_T \left(e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} - e^{-\gamma} \right) \quad (5.2.24)$$

zu approximieren, müssen analog zu Abschnitt 4.3.2 zunächst Stützstellen festgelegt werden. An diesen Stützstellen wird die Funktion in einer Taylor-Reihe entwickelt, um eine lineare Approximation zu erhalten. Der betrachtete Arbeitsbereich wird wie zuvor bei der exakten Modellierung mit $z_i(t) = y_i(t) \in [y_{\min}, y_{\max}] = [-0.9, 20]$ festgelegt. Innerhalb dieses Arbeitsbereichs werden die Stützstellen ζ_i äquidistant verteilt:

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_{N_\zeta}] \quad (5.2.25)$$

wobei sich der Abstand δ der Stützstellen aus der Anzahl der gewünschten Stützstellen N_ζ und dem Arbeitsbereich ermittelt:

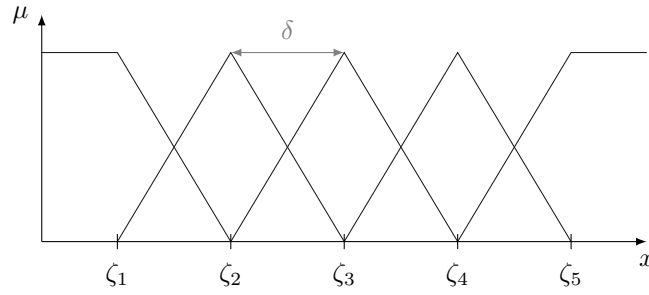
$$\delta = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_\zeta + 1} \quad (5.2.26)$$

Folglich ergibt sich für die Stützstellen

$$\zeta = \{\zeta_i \in \mathbb{R} | \zeta_i = y_{\min} + i \cdot \delta, i \in \mathbb{Z}\} \in [y_{\min}, y_{\max}] \quad (5.2.27)$$

wobei $1 \leq i \leq N_\zeta$. Abbildung 5.8 zeigt die äquidistante Aufteilung des Arbeitsbereichs in $N_\zeta = 5$ Stützstellen unter der Verwendung orthogonaler triangularer Gültigkeitsfunktionen beziehungsweise an den Rändern bei y_{\min} und y_{\max} einseitig geöffneter Rampen (vgl. Abbildung 4.7 und Gleichung (4.1.5)). Durch die Verwendung einseitig geöffneter Rampen an den Rändern des Arbeitsbereichs und sonstiger orthogonaler Fuzzyfizierung wird sichergestellt, dass sich alle Gültigkeitsfunktionen zu 1 aufsummieren. Somit sind die Gültigkeitsfunktionen gleichbedeutend mit den Fuzzy-Basisfunktionen. Nun kann die nichtlineare Funktion f_{NL} an den Stützstellen in einer Taylor-Reihe entwickelt werden. Es gilt demnach in näherer Umgebung einer Stützstelle ζ_i die lineare Approximation:

$$f_{\text{NL}}(y_i(t)) \approx f_{\text{NL}}(\zeta_i) + \left(\frac{\partial f_{\text{NL}}}{\partial y_i} \right) \bigg|_{y_i=\zeta_i} \cdot (y_i(t) - \zeta_i) \quad (5.2.28)$$

Abbildung 5.8: Orthogonale Fuzzyfizierung eines eindimensionalen Arbeitsraums mit $N_\zeta = 5$ Stützstellen

und für das betrachtete System aus Gleichung (5.2.23):

$$f_{\text{NL}}(y_i(t)) \approx f_{\text{NL}}(\zeta_i) + \beta_T \left(\frac{\gamma}{(1 + y_i(t))^2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} \right) \Big|_{y_i=\zeta_i} \cdot (y_i(t) - \zeta_i) \quad (5.2.29)$$

Aufgetrennt in einen linearen und einen affinen Anteil folgt letztlich:

$$\begin{aligned} f_{\text{NL}}(y_i(t)) &\approx \underbrace{\beta_T \left(\frac{\gamma}{(1 + y_i(t))^2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} \right) y_i(t)}_{\text{linearer Teil}} \\ &\quad + \underbrace{f_{\text{NL}}(\zeta_i) - \beta_T \left(\frac{\gamma}{(1 + y_i(t))^2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{1+y_i(t)}} \right) \zeta_i}_{\text{affiner Teil}} \quad (5.2.30) \\ &= \Lambda_{\text{lin}}^{\zeta_i} \cdot y_i(t) + \Lambda_{\text{aff}}^{\zeta_i} \end{aligned}$$

Für die lineare Approximation des diskretisierten nichtlinearen Gesamtsystems aus Gleichung (5.2.23) folgt nun in näherer Umgebung der Stützstelle ζ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} y_{i-1}(t) + \frac{1}{\Delta x^2} y_{i+1}(t) - \left(\frac{2}{\Delta x^2} - \beta_U + \Lambda_{\text{lin},i}^{\zeta_i} \right) y_i(t) \\ &\quad + \beta_U b_i u(t) + \Lambda_{\text{aff},i}^{\zeta_i} \quad (5.2.31) \end{aligned}$$

beziehungsweise folgt für die angestrebte Matrix-Vektor Form mit $\varsigma_i = \left(\frac{2}{\Delta x^2} - \beta_U + \Lambda_{\text{lin},i}^{\zeta_i} \right)$ an der Stützstelle ζ_i :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_5(t) \\ \dot{y}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varsigma_1 & \frac{1}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varsigma_5 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x^2} & \varsigma_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_5(t) \\ y_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_u b_1 \\ \beta_u b_2 \\ \vdots \\ \beta_u b_5 \\ \beta_u b_6 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \Lambda_{\text{aff},1}^{\zeta_1} \\ \Lambda_{\text{aff},2}^{\zeta_2} \\ \vdots \\ \Lambda_{\text{aff},5}^{\zeta_5} \\ \Lambda_{\text{aff},6}^{\zeta_6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{A}_i \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_i u(t) + \mathbf{a}_i \quad (5.2.32)$$

Es bleibt zu erwähnen, dass die durch die Linearisierung entstehenden Koeffizienten $\Lambda_{\text{lin},i}$ und $\Lambda_{\text{aff},i}$ durchaus ortsabhängig sein können. Daher wird der Ortsindex i mitgeführt. Im vorliegenden Beispiel ist dies allerdings nicht der Fall, sodass alle linearen Koeffizienten $\Lambda_{\text{lin},i} = \Lambda_{\text{lin}}$ und somit $\varsigma_i = \varsigma$, sowie die affinen Koeffizienten $\Lambda_{\text{aff},i} = \Lambda_{\text{lin}}$ gleich sind. Des Weiteren ist der Einfluss der Eingangsgröße $u(t)$ rein linear, sodass die Matrix $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$ ebenfalls unabhängig von der Stützstelle einheitlich ist.

Gleichung (5.2.32) beschreibt bislang nur die Approximation um eine ausgewählte Stützstelle ζ_i . Eine Approximation des Gesamtsystems folgt, wenn die TS Fuzzy Form verwendet wird. Dabei wird ebenfalls wieder das Hadamard-Produkt verwendet, um die Regelanzahl gering zu halten (siehe Abschnitt 5.2). Durch die Verwendung des Hadamard-Produkts folgt für die Regelanzahl des TS Fuzzy Systems $N_R = N_\zeta$ und letztlich für das örtliche verteilte approximierte TS Fuzzy System:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \sum_{i=1}^{N_R} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z}(t)) \odot [\mathbf{A}_i \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_i u(t) + \mathbf{a}_i] \quad (5.2.33)$$

Bei der approximativen Modellierung entsteht, wie bereits erwähnt, immer ein affiner Anteil, sofern das System nicht in einer Gleichgewichtslage approximiert wurde (im Gegensatz zum Sektor-Nichtlinearitäten Ansatz). Abbildung 5.9 zeigt beispielhaft die approximative Modellierung des betrachteten Systems. Dargestellt ist einerseits zum Vergleich die Simulation des Systems mit Hilfe der *PDEToolbox* von *Matlab* oben links und andererseits

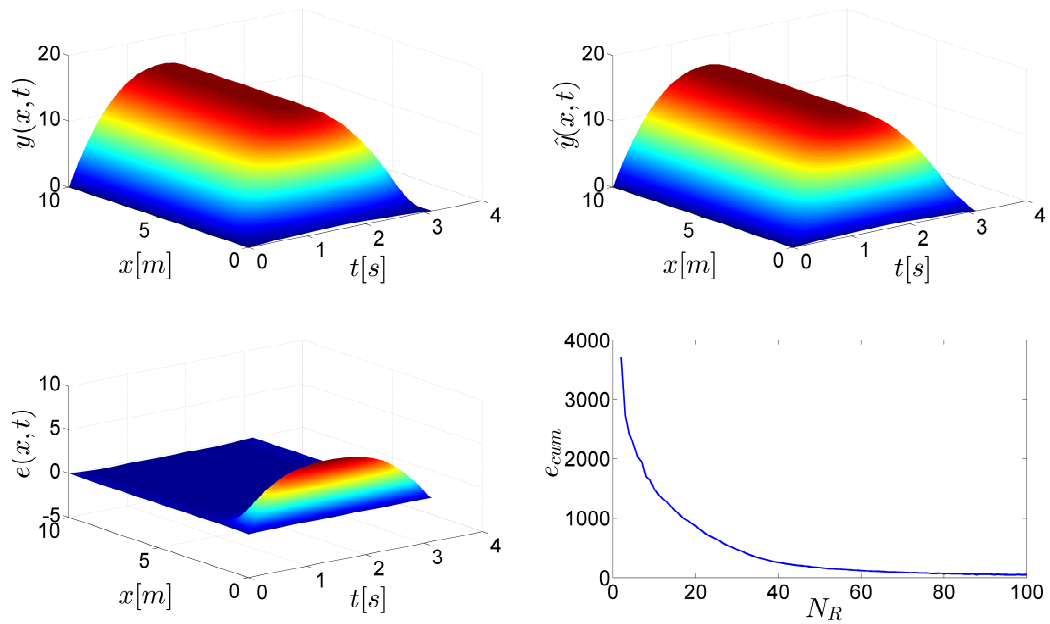


Abbildung 5.9: Beispiel einer approximativen Modellierung. Das reale System $y(x, t)$ (oben links), die TS Fuzzy Approximation mit $N_R = 5$ Teilmodellen $\hat{y}(x, t)$ (oben rechts) und das zugehörige Fehlersignal $e(x, t)$ (unten links). Die Entwicklung des kumulierten Fehlersignals $e_{cum}(x, t)$ in Abhängigkeit der Teilmodellanzahl N_R (unten rechts).

die Approximation $\hat{y}(x, t)$ mit $N_\zeta = N_R = 5$ Stützstellen beziehungsweise Fuzzy Teilsystemen oben rechts. Es ist deutlich erkennbar, dass bereits bei fünf Teilsystemen kein merklicher Unterschied erkennbar ist. Lediglich bei der Betrachtung des Fehlersignals $e(x, t)$ (unten links) wird deutlich, dass die Approximation im unteren Wertebereich einen erkennbaren Fehler verursacht, der im weiteren Verlauf abklingt.

Die letzte Darstellung (unten rechts) zeigt das kumulierte Fehlersignal in Abhängigkeit der gewählten Stützstellen- oder Teilsystemanzahl N_R . Der kumulierte Fehler wurde als Summe aller örtlichen Fehler über die komplette Zeit berechnet:

$$e_{cum} = \sum_t \sum_x \sqrt{e(x, t)^2} \quad (5.2.34)$$

Deutlich erkennbar ist die gute Approximationsfähigkeit der TS Fuzzy Systeme anhand des abklingenden Fehlers bei gesteigerter Modellanzahl. Um einen besseren Eindruck davon zu erhalten, wie sich die Approximationsgüte mit gesteigerter Teilmodellanzahl verändert, wurde in Abbildung 5.10

auszugsweise der simulierte Verlauf am Ort $x = \pi/2$ für eine Auswahl an TS Fuzzy Systemen dargestellt.

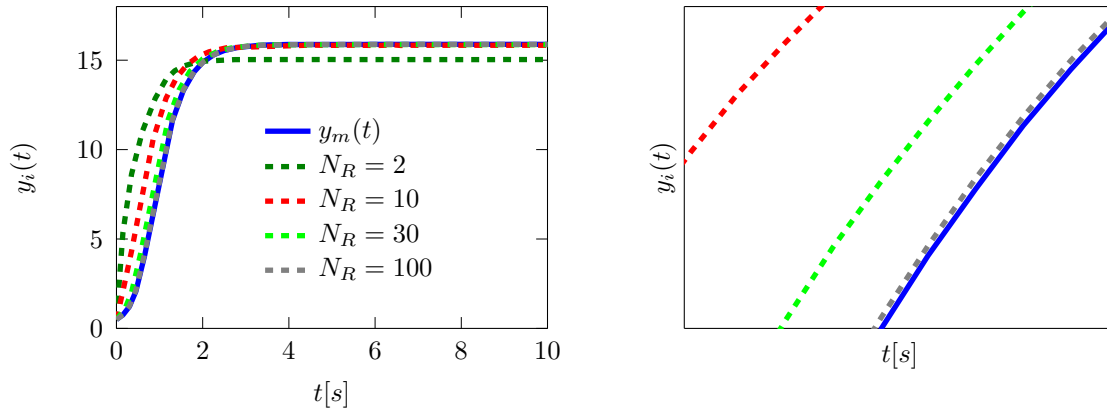


Abbildung 5.10: Auszug des Verlaufs bei $x = \pi/2$ für verschiedene Teilmodellanzahlen N_R (links) und ein vergrößerter Ausschnitt (rechts).

Die linke Abbildung zeigt die TS Fuzzy Approximationen (gestrichelt) und den realen Verlauf $y(\frac{\pi}{2})$ (durchgezogen). Die Annäherung bei erhöhter Modellanzahl ist deutlich erkennbar und ab $N_R = 30$ ist ein Unterschied kaum erkennbar. Das rechte Bild zeigt lediglich eine Vergrößerung eines Ausschnitts um die weitere Annäherung zwischen $N_R = 30$ und $N_R = 100$ zu verdeutlichen.

5.2.3 Identifikation örtlich verteilter TS Fuzzy Systeme

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Bestimmung von örtlich verteilten TS Fuzzy Systemen auf Grundlage der bekannten Modellgleichungen beschrieben. Es konnte gezeigt werden, dass sowohl die exakte Modellierung als auch die approximative Modellierung durch Linearisierung gute Ergebnisse erzielen und sich die Modelle gut zur Reglersynthese eignen. In vielen technischen Anwendungen ist es allerdings sehr aufwendig, die Modelle analytisch zu bestimmen. So auch im Bereich der Raumklimamodellierung und Regelung, sofern das Raumklima als örtlich verteiltes System betrachtet wird. Abhilfe können hier Methoden der datengetriebenen Modellbildung

oder Systemidentifikation schaffen. Ein leistungsstarkes Verfahren zur Identifikation von TS Fuzzy Systemen ist dabei das in Abschnitt 4.4 beschriebene hierarchische Wachstumsverfahren LOLIMOT. Hier wird der Arbeitsraum in jeder Iteration achsenorthogonal aufgeteilt. Dabei wird immer nur das lokal am schlechtesten approximierende Teilsystem weiter unterteilt. Der Verlauf der Nichtlinearität im Arbeitsraum wird also in gewisser Hinsicht in Betracht gezogen, was auf eine Reduzierung der notwendigen Modelle führt. Die Gültigkeitsfunktionen sind dabei wie folgt definiert:

$$\mu_i(y(x, t)) = e^{-\frac{1}{2} \frac{(y(x, t) - \zeta_i)^2}{\sigma_i^2}} \quad (5.2.35)$$

Die Standardabweichung der gaussförmigen Gültigkeitsfunktionen wird nach $\sigma_i = k_\sigma \cdot \Delta\zeta_i$ berechnet, wobei der Faktor $k_\sigma = 1/3$ gewählt wurde (vgl. [77]). Dabei bezeichnet $\Delta\zeta_i$ die jeweilige Breite des Teilabschnittes $\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$. Nach der Definition der Gültigkeitsfunktionen müssen diese noch normiert werden, sodass die konvexe Summeneigenschaft gilt und sich alle Gültigkeitsfunktionen zu eins addieren. Es folgt für die sogenannten Fuzzy-Basisfunktionen:

$$\eta_i(y(x, t)) = \frac{\mu_i(y(x, t))}{\sum_{j=1} \mu_j(y(x, t))} \quad (5.2.36)$$

Bei einer Teilung in einem Iterationsschritt wird das Teilmodell mit der schlechtesten lokalen Approximationsgüte nach dem mittleren quadratischen Fehler ausgewählt und weiter unterteilt, sodass neue Zentren ζ_i entstehen (siehe Abbildung 5.11).

Beim zuvor betrachteten Beispiel der Temperaturverteilung auf einer eindimensionalen Stange handelt es sich bei der zu approximierenden nichtlinearen Funktion um eine Exponentialfunktion. Exponentialfunktionen weisen im unteren Wertebereich deutlich ausgeprägteres nichtlineares Verhalten auf, als im oberen Wertebereich. Für ein hierarchisch wachsendes TS Fuzzy System ist also zu erwarten, dass im unteren Wertebereich eine deutlich feinere Untergliederung stattfindet als im oberen Wertebereich. Abbildung 5.12

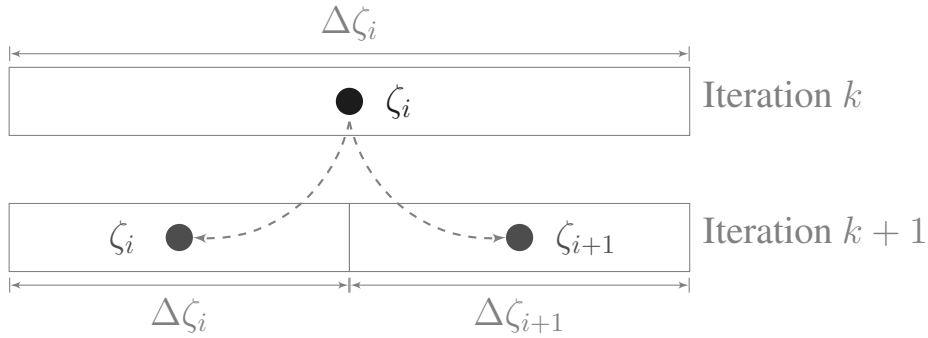


Abbildung 5.11: Achsenorthogonale Aufteilung des Arbeitsraumes eines Teilmodells in einer Iteration

zeigt die Verteilung der Gültigkeitsfunktionen im Arbeitsraum exemplarisch für die ersten vier Iterationen des wachsenden Algorithmus. Deutlich erkennbar ist, dass erwartungsgemäß der untere Wertebereich feiner Untergliedert wird als der obere Wertebereich.

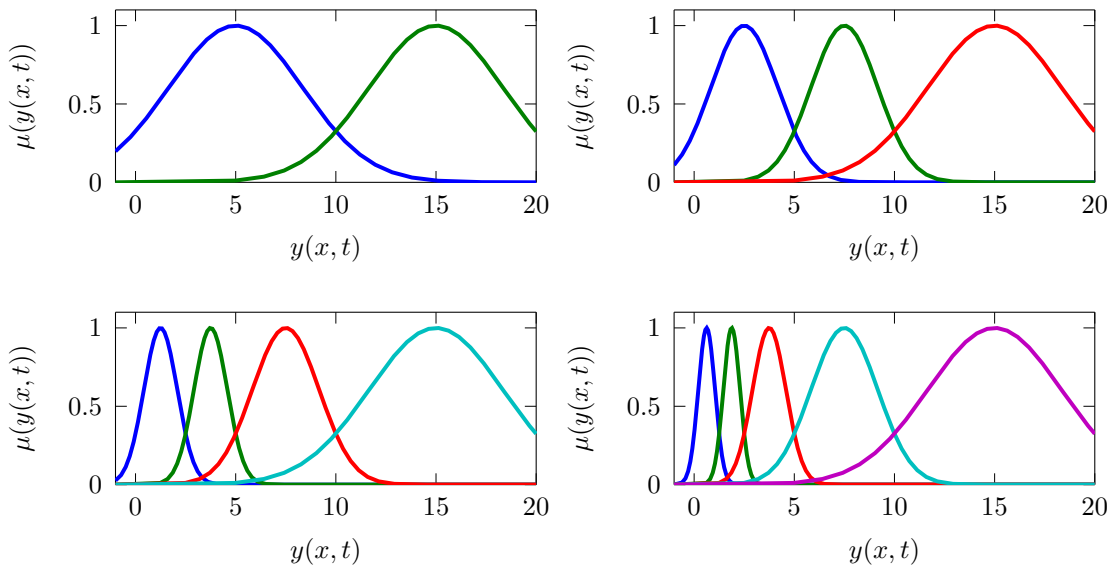


Abbildung 5.12: Gültigkeitsfunktionen bei achsenorthogonaler Aufteilung des Arbeitsraumes in den ersten vier Iterationen.

Zudem zeigt Abbildung 5.13 die Fuzzy-Basisfunktionen η ebenfalls für die ersten vier Iterationen. Die nichtlineare Funktion f_{NL} ist zudem in Abbildung 5.14 nochmals in dem definierten Wertebereich dargestellt. Zudem sind die Arbeitsraumteilungen der ersten zehn Iterationen dargestellt. Auch hier ist

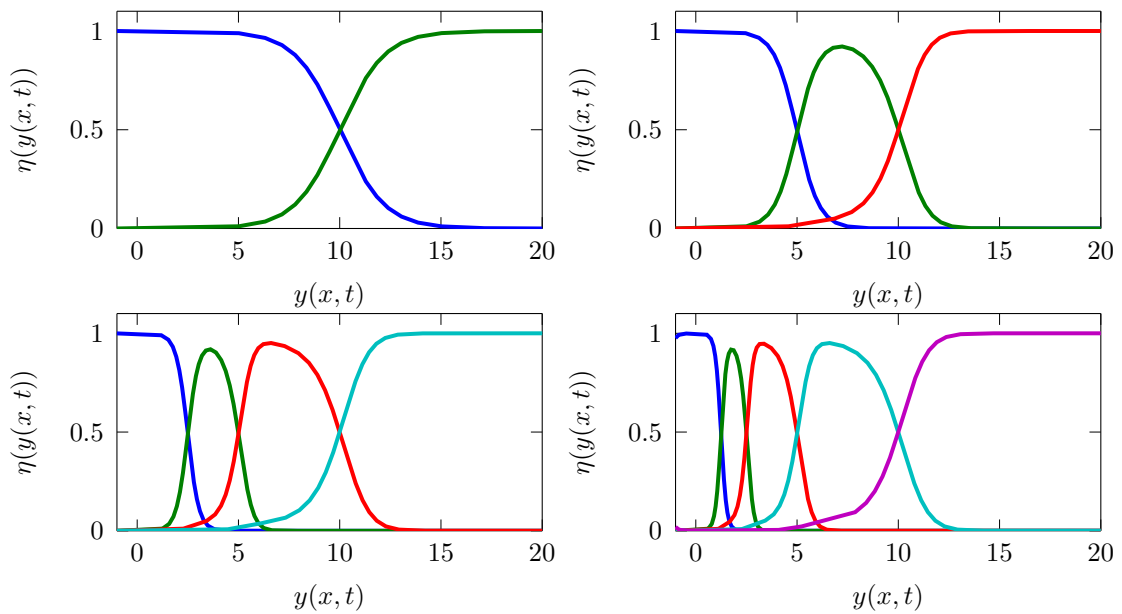


Abbildung 5.13: Fuzzy-Basisfunktionen bei achsenorthogonaler Aufteilung des Arbeitsraumes in den ersten vier Iterationen.

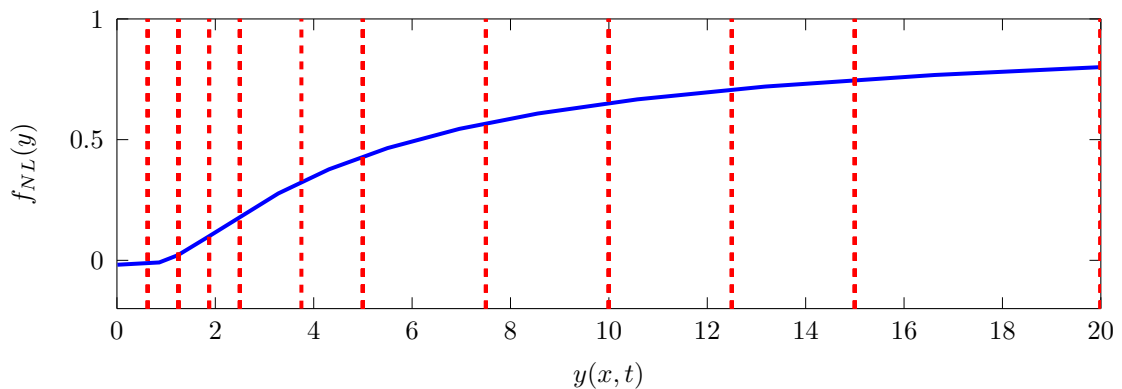


Abbildung 5.14: Aufteilung der Teilsysteme auf die nichtlineare zu approximierende Funktion.

deutlich erkennbar, dass bei zehn Iterationen die einzelnen Teilabschnitte nun nahezu linearen Charakter aufweisen. Im unteren Wertebereich sind dazu mehr Teilabschnitte nötig, da die Funktion dort eine stärkere Krümmung aufweist.

Erwartungsgemäß sollte das Vorgehen der hierarchischen Aufteilung des Arbeitsraums einen schneller abklingenden Fehler als Resultat aufweisen, als die äquidistante Aufteilung im vorigen Abschnitt, da die Zentren der Ap-

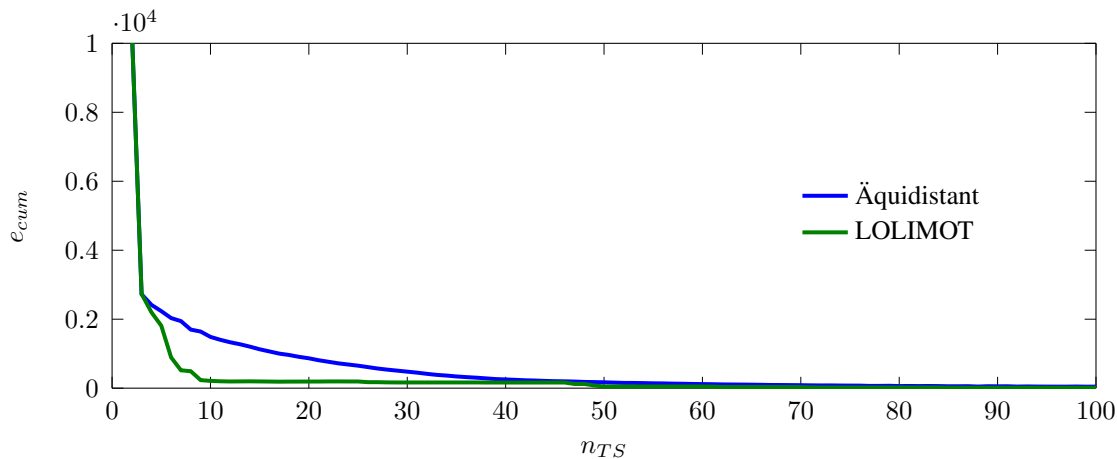


Abbildung 5.15: Kumuliertes Fehlersignal bei äquidistanter Verteilung des Fehlersignals und bei achsenorthogonaler Aufteilung des Arbeitsraums.

proximation in „kritischere“ Punkte bezüglich des nichtlinearen Verhaltens gelegt werden. Abbildung 5.15 zeigt den Verlauf des kumulierten Fehler nach Gleichung (5.2.34) für die äquidistante Aufteilung verglichen mit der hierarchischen Teilung des Arbeitsraumes. Der Fehler der ersten beiden Iterationen, also des rein linearen Modells und der ersten Teilung sind identisch. Dies lässt sich damit begründen, dass sowohl das rein lineare Modell als auch die erste Teilung eindeutig bestimmt sind und daher bei beiden Vorgehensweisen gleich ausfällt. Für weitere Iterationen ist deutlich erkennbar, dass die hierarchische Aufteilung den kumulierten Fehler bei Erhöhung der Teilmodellanzahl erheblich schneller absinken lässt als bei äquidistanter Verteilung. Es bleibt allerdings auch festzuhalten, dass der Unterschied für große Teilmodellzahlen n_{TS} wieder kompensiert wird. Auch diese Beobachtung ist zu erwarten, da der Arbeitsbereich in diesem Fall so fein unterteilt ist, dass sich die Platzierung der Zentren nur marginal unterscheiden wird.

6 Simulative Untersuchungen

In diesem Kapitel wird die zuvor eingeführte Methodik der verteilten TS Fuzzy Systeme auf das Raumklimaverhalten übertragen. Es soll gezeigt werden, dass die verteilten TS Fuzzy Systeme ein adäquates Werkzeug zur örtlich verteilten Modellierung des Raumklimaverhaltens und zur Reglersynthese sind. Der Fokus liegt dabei, wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt, auf der Modellierung der relativen Luftfeuchte. Da diese aber streng mit der Temperatur gekoppelt ist, wird die Temperatur ebenfalls betrachtet (siehe Kapitel 2). Grundlagen für die Folgenden Untersuchungen sind Ergebnisse aus CFD Simulationen. Die Verwendung von CFD Simulationen zur Validierung neuer Ansätze ist dabei ein oft genutztes Werkzeug, da sie detailreiche und sehr adäquate Ergebnisse liefert [41, 6]. Zudem ist es nahezu unmöglich, reproduzierbare Testszenarien in realen Applikationen zu schaffen, um verschiedene Methoden miteinander zu vergleichen. Die Ergebnisse von Feldtests sind hier stark von den Umgebungsbedingungen abhängig und zudem sehr zeitaufwendig. Im Gegensatz hierzu, lassen sich in CFD Simulationsumgebungen vorgegebene Testszenarien nutzen, um verschiedene Methoden bei gleichbleibenden Umgebungsbedingungen mit vertretbarem Zeitaufwand miteinander zu vergleichen. Aus diesem Grund finden sich in der Literatur kaum vergleichende Ergebnisse aus realen Umgebungen, sondern nahezu ausschließlich simulationsbasiert [46, 47, 6]. Um eine spätere Übertragbarkeit in reale Applikationen zu gewährleisten, wurde eine beispielhafte Applikation ausgewählt und in der Simulationsumgebung abgebildet.

6.1 Vorstellung der Applikation

Im Rahmen von diversen Forschungsprojekten im Bereich des Präventiven Klimamanagements und der Präventiven Konservierung ist die „Kulturstiftung des Hauses Hessen“ Partner der Hochschule Fulda [132]. Ein Objekt der Stiftung ist dabei das Schloss Fasanerie (siehe Abbildung 6.1) in Eichenzell in der Nähe von Fulda.



Abbildung 6.1: Schloss Fasanerie der Kulturstiftung des Hauses Hessen.

Das Barockschloss wird heute einen Teil des Jahres (Sommermonate) museal genutzt und die zahlreichen schützenswerten Gegenstände im Schloss ausgestellt. Außer der freien Lüftung, sowie dem kurzzeitigen Einsatz mobiler Be- und Entfeuchtungsgeräte besteht in den betrachteten Räumlichkeiten keine Möglichkeit der Klimatisierung, weder zur Temperierung noch zur Feuchteregulierung.

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurde das sogenannte „Landgrafenzimmer“ gewählt. Ein Vorteil dieses Raumes ist, dass er von den Museumsführungen nicht betroffen ist und dennoch die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Probleme der Präventiven Konservierung aufweist, da er kulturell schützenswerte Güter enthält. Der Raum befindet sich im Nord-

flügel des Schlosses im ersten Obergeschoss. Abbildung 6.2 zeigt die Lage des Raumes innerhalb des Schlosses, um die Rahmenbedingungen für die Folgenden Untersuchungen darzustellen.

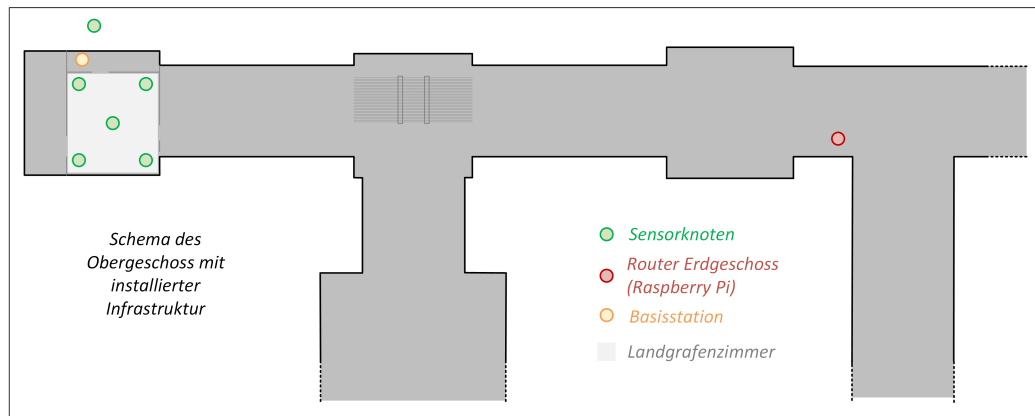


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung des Schlosses und der betrachteten Räume.

Zunächst wurde das Raumklima über einen längeren Zeitraum aufgezeichnet um den momentanen Stand zu analysieren. Hierfür wurde im Rahmen des Projektes „HumiControl“, gefördert durch das „zentrale Innovationsprogramm Mittelstand (ZIM)“ des Bundesministeriums für Wirtschaft und Technologie, ein eigenes Sensornetzwerk entwickelt, welches speziell auf die Anforderungen im Bereich der Raumklimamessung und Raumklimaregelung angepasst wurde. Es verfügt über die gängigen Kommunikationstechnologien (z.B. Wifi, Ethernet, TCP/IP, usw.), sodass die Verbindung mit anderen Komponenten über Schnittstellen leicht umsetzbar ist. Die Sensorknoten wurden so entwickelt, dass sie wartungsarm über einen langen Zeitraum (mehrere Monate) messen können. Die Stromversorgung wird über Lithium-Polymer Akkus bereitgestellt, wobei der Ladestand der Akkus in der Basisstation verfolgt werden kann. Das Laden der Akkus kann über die USB-Schnittstelle der Sensorknoten erfolgen. Die Basisstation sammelt die Daten aller Sensorknoten über ein eigenes energiesparendes Funkprotokoll in einem vorgegeben Intervall und speichert diese intern ab. Sofern die Basisstation an das Internet gekoppelt ist, lässt sich auf diese über eine Weboberfläche zugreifen, um Daten zu visualisieren oder die Basisstation

oder Sensorknoten zu konfigurieren. Da bei einer Klimamessung über einen längeren Zeitraum eine große Menge an Daten anfällt, wird zusätzlich eine SQL-Datenbank verwendet, die für das Datenmanagement genutzt wird. Dabei wurde eine lokale und eine globale Datenbank genutzt, um bei möglichem Verlust der Internetverbindung keine Daten zu verlieren. Die lokale Datenbank wurde auf einem „*Raspberry Pi*“ realisiert und speichert die Daten zunächst lokal am Ort der Applikation ab. Hierfür wird ein unidirektionaler Kommunikationsweg über TCP/IP zwischen der Basisstation und dem Raspberry Pi genutzt. Die Basisstation sendet eine XML-Datei an einen „PHP-Mapper“, der diese Datei interpretiert und die empfangenen Daten über SQL-Befehle in die jeweiligen Tabellen der SQL-Datenbank überträgt. Die dadurch im Raspberry Pi gespeicherten Daten werden im Anschluss in regelmäßigen Abständen ebenfalls über TCP/IP auf einen Server übertragen, der die globale Datenbank bereitstellt, die für das Datenmanagement verwendet wird. Hier lassen sich die Daten durch ein eigens entwickeltes Tool, den „Datamonitor“ (siehe Abbildung 6.3) benutzerfreundlich visualisieren oder exportieren, ohne das Datenbank- oder SQL-Kenntnisse notwendig sind. Die globale Datenbank übernimmt zudem Aufgaben des Datenmanagement, wie zum Beispiel Verdichtung weit zurückliegender Daten, Ausreißererkennung oder Erkennung und Behandlung von Datenlücken.

Einen Strukturplan der Applikation zeigt Abbildung 6.4. Die Basisstation ist so konzipiert, dass sie in der Anwendung als Regler fungiert. Da es sich um ein örtlich verteiltes Regelkonzept handelt, müssen die Stellgrößen der Aktoren aufeinander abgestimmt und somit zentral berechnet werden. Die Implementierung des Regelungsalgorithmus sowie der Systemidentifikation findet daher auf der Basisstation statt. Die Stellgrade werden im Anschluss an die örtlich verteilten Aktoren, im vorliegenden Fall mobile Be- und Entfeuchtungsgeräte, gesendet. Da es sich bei der Raumklimaregelung um eine zeitunkritische Regelung handelt (Abtastzeiten >5 min.), stellt diese Art der Realisierung kein Problem dar, verhindert aber, dass die Aktoren sich untereinander negativ beeinflussen. Die Sensorknoten sind daher so kon-

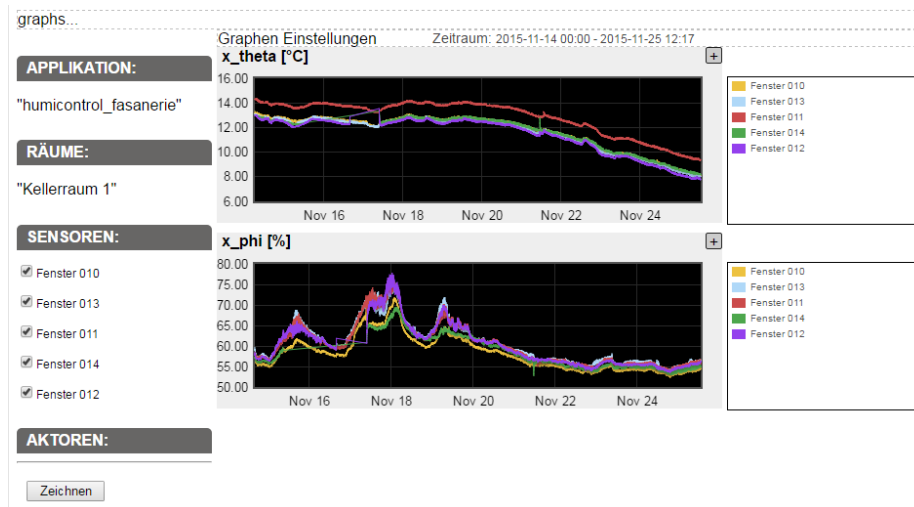


Abbildung 6.3: Screenshot des Datamonitors.

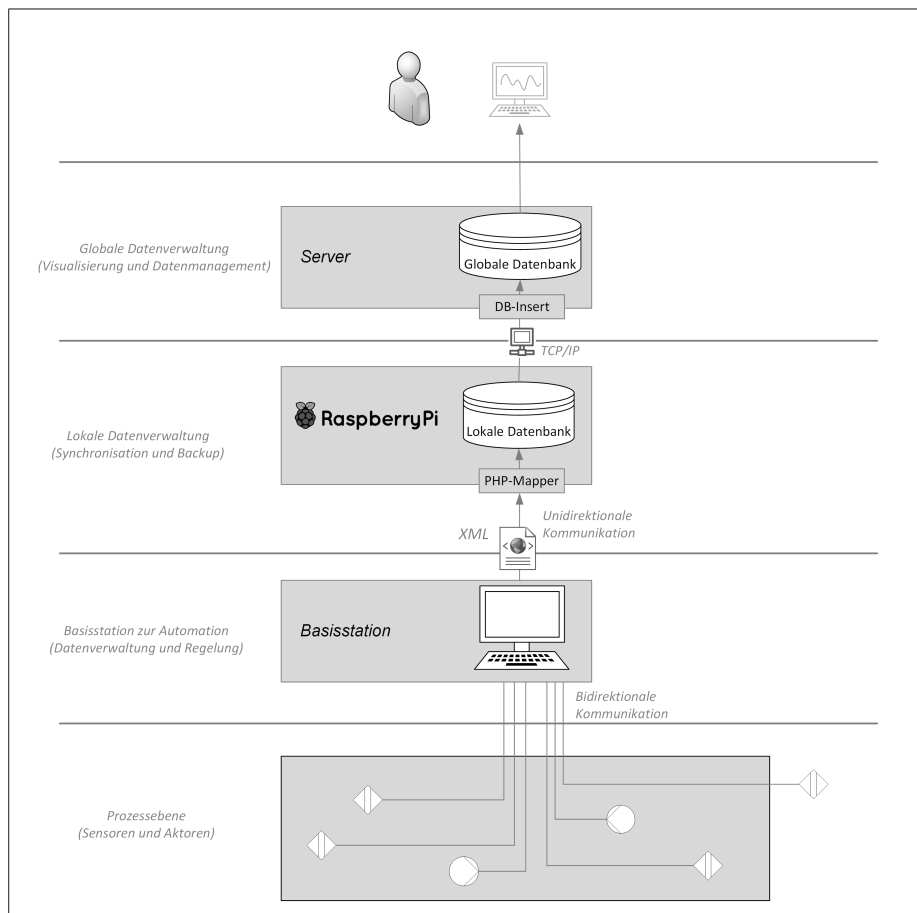


Abbildung 6.4: Allgemeiner Strukturplan der Applikation.

zipiert worden, dass sie durch einfache Konfiguration ebenfalls als Aktor fungieren und Stellgrade empfangen können. Die Stellgrade werden dann an die Endgeräte weitergeben, worauf später näher eingegangen wird.

Wie in Abbildung 6.2 dargestellt, wurde eine langfristige Messung mit der zuvor beschriebenen Infrastruktur im Landgrafenzimmer des Schlosses Fasanerie durchgeführt. Hierfür wurden fünf Sensorknoten im Raum verteilt, sowie ein Sensorknoten außerhalb des Raumes platziert, um die Umgebungsbedingungen zu erfassen. Das Landgrafenzimmer ist von drei Seiten von benachbarten Räumen umschlossen. Die vierte Seite stellt die Gebäudehülle dar.

Abbildung 6.5 zeigt einen Auszug der Messungen über 120 Tage. Dabei wurde jeweils die gemittelte relative Luftfeuchte der inneren Sensoren φ und die gemittelte Temperatur der inneren Sensoren ϑ als Zeitreihe und als Verteilung in Form von Boxplots dargestellt.

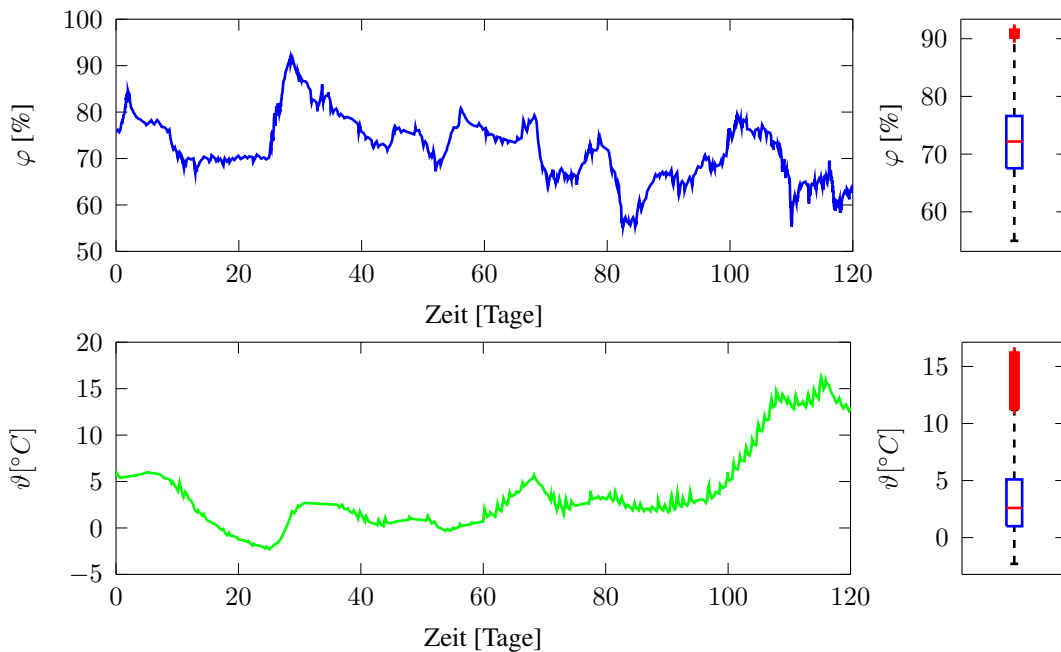


Abbildung 6.5: Auszug einer Messung. Dargestellt ist der Mittelwert der Sensoren (links) für relative Feuchte (oben) und Temperatur (unten) und Boxplots der Messungen (rechts)

Zudem zeigt Abbildung 6.6 die maximale Abweichung $\Delta_x \varphi$ beziehungsweise $\Delta_x \vartheta$ aller Sensoren zu jeder Messung, ebenfalls als Zeitreihe und als Messwertverteilung für relative Luftfeuchte und Temperatur innen. Die maximale Abweichung wird als ein Indikator für die örtliche Verteilung des Raumklimas betrachtet und wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\Delta_x \varphi[k] &= \max_i(\varphi_i[k]) - \min_i(\varphi_i[k]) \\ \Delta_x \vartheta[k] &= \max_i(\vartheta_i[k]) - \min_i(\vartheta_i[k])\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

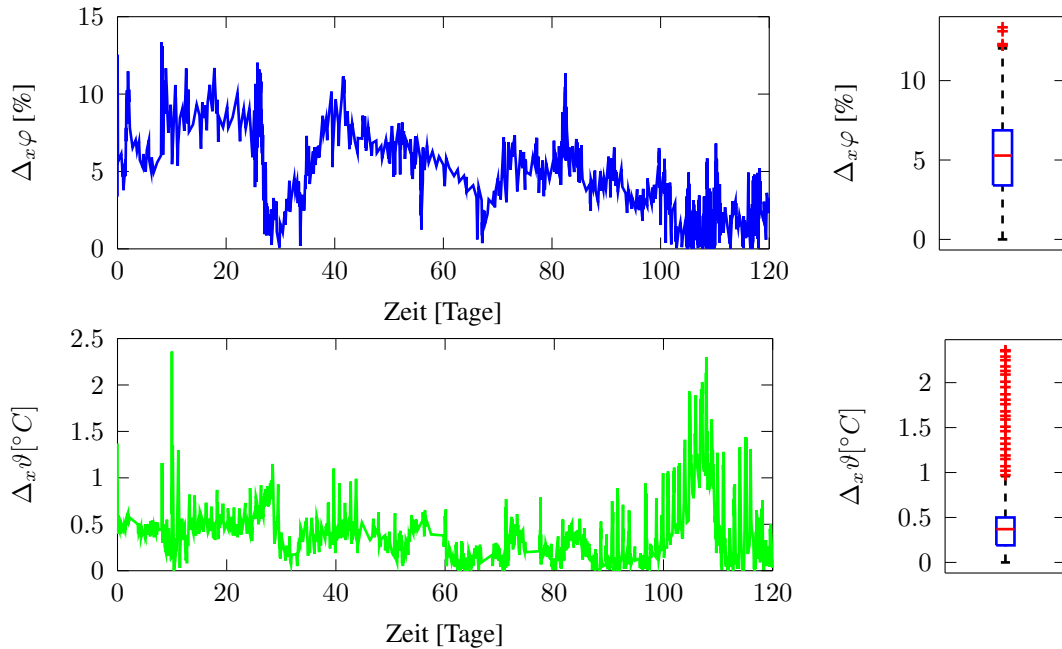


Abbildung 6.6: Auszug aus einer Messung. Dargestellt ist die maximale Abweichung der positionierten Sensoren pro Messung (links) für relative Feuchte (oben) und Temperatur (unten) und die Verteilung der Abweichungen in Form von Boxplots (rechts).

Abbildung 6.5 zeigt eine deutlich zu hohe relative Raumluftfeuchte, deren Median bei ca. $\varphi_{\text{median}} = 73\%$ liegt, und dauerhaft über einem gewünschten Wert von ca. $\varphi_{\text{soll}} = 50\%$. Das Interquartil, indem 50% aller Messdaten liegen, befindet sich zwischen $\varphi_{\text{iq}} = 67\% \dots 78\%$. Der Bereich aller Messwerte liegt zwischen $\varphi_{\text{min}} = 55\%$ und $\varphi_{\text{max}} = 92\%$. Zusammenfassend kann die relative Luftfeuchte somit als deutlich zu hoch eingestuft werden. Es

besteht also primär die Aufgabe, die relative Feuchte in dieser Applikation deutlich zu senken, wobei das Raumklima, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, möglichst konstant gehalten werden sollte. Auch bei der Betrachtung der örtlichen Abweichungen der Messungen an den verschiedenen Punkten sind deutliche Schwankungen feststellbar, allerdings primär bei der Betrachtung der relativen Luftfeuchte. Die Temperatur im Raum scheint deutlich besser „durchmischt“. Um ein ganzheitlich akzeptables Raumklima zu schaffen, ist daher als Schlussfolgerung aus obigen Messungen die örtliche Verteilung der relativen Luftfeuchte in die Regelung mit einzubeziehen.

6.2 Versuchsumgebung

Wie bereits erwähnt, wird für die Durchführung der Versuche auf CFD-Simulationen zurückgegriffen, um einerseits reproduzierbare Umgebungsbedingungen zu gewährleisten und andererseits Zeit im Vergleich zu realen Messungen zu sparen. Im Rahmen der Folgenden Untersuchungen wurde die Workbench 16.2 der Simulationssoftware *Ansys* genutzt [133]. Für die CFD-Simulationen der Raumlufteverteilung wurde das Modul *Fluent* verwendet [134]. Die CFD-Simulation tritt im Strukturplan der Applikation aus Abbildung 6.4 an die Stelle der Prozessebene. Regelung, Identifikation und Datenmanagement wird weiterhin über die Basisstation umgesetzt, sodass eine spätere Übertragbarkeit in die praktische Anwendung problemlos durchführbar ist. Lediglich die physikalische Entstehung der Messwerte wird bei den Folgenden Untersuchungen durch simulative Werte ersetzt.

Um eine CFD-Simulation durchführen zu können, müssen

- die geometrischen Verhältnisse des Problems festgelegt und in einem (zumeist dreidimensionalen) Modell abgebildet werden
- Approximationsgitter der räumlichen Diskretisierung erstellt werden
- die Eigenschaften der Materialien (z.B. Dicke der Gebäudehülle) parametrisiert werden

- die Anfangszustände der Simulation definiert werden
- Randbedingungen an den geometrischen Grenzen definiert werden
- interne Quellen/Senken modelliert werden (zum Beispiel die Aktorik)

Diese Initialisierung einer CFD-Simulation hat entscheidenden Einfluss darauf, wie adäquat die Ergebnisse der Simulation die Realität abbilden und ob diese Ergebnisse für weitere Untersuchungen verwendbar sind.

Um die geometrischen Verhältnisse des betrachteten Objekts abzubilden, werden CAD Konstruktionen mit der Software *SolidWorks* erstellt. Die CAD Konstruktionen lassen sich im Anschluss in der Ansys Workbench laden. Abbildung 6.7 zeigt die Abbildung des Landgrafenzimmers als CAD Konstruktion in SolidWorks.

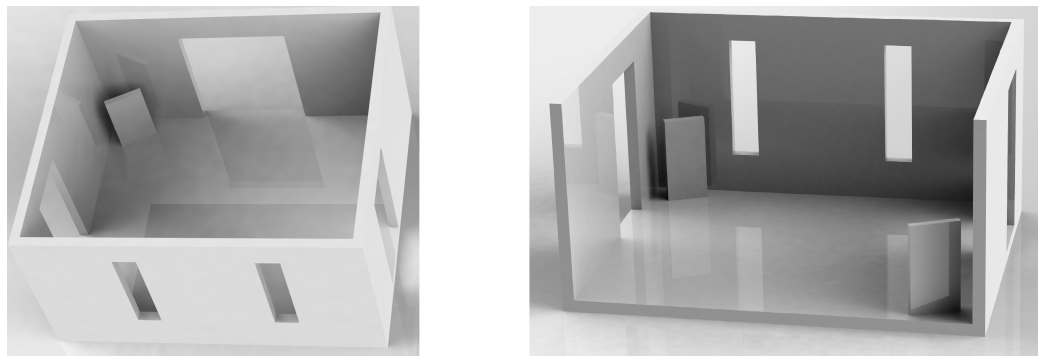


Abbildung 6.7: 3D Nachbildung des Landgrafenzimmers in SolidWorks.

Die Abmessungen des betrachteten Raumes sind in etwa 7,0 m x 7,0 m x 4,0 m. In der rechten Schnittdarstellung sind neben Türen und Fenstern bereits Aktoren im Raum platziert. Bei den Aktoren handelt es sich, wie bereits erwähnt, um mobile Be- und Entfeuchtungsgeräte (siehe Abbildung 6.8). Anhand der Datenblätter der Geräte [28], die üblicherweise in der betrachteten Applikation und insbesondere im Rahmen dieser Untersuchungen verwendet werden, lassen sich die Eigenschaften in Ansys abbilden. Hierzu werden die Aktoren zunächst geometrisch modelliert und anschließend als Ein- beziehungsweise Auslässe in Ansys Fluent definiert.



Abbildung 6.8: Verwendete Aktorik der Firma Brune Luftbefeuchtung Proklima GmbH. Mobiles Entfeuchtungsgerät Dehumid HP 50 (links) und mobiles Befeuchtungsgerät (B 500 Professional) rechts.

Der Entfeuchter (siehe linkes Bild in Abbildung 6.8) weist dabei eine maximale Entfeuchtungsleistung von bis zu 50 Litern pro Tag auf, wohingegen der Befeuchter (siehe rechtes Bild in Abbildung 6.8) eine Befeuchtungsleistung von 2,6 Litern pro Stunde liefert. Die realen Geräte lassen sich allerdings nicht kontinuierlich ansteuern, so dass die Entfeuchter- beziehungsweise Befeuchterleistung nicht beliebig zwischen null und dem maximalen Wert eingestellt werden kann. Bei dem Befeuchtungsgerät ist ein vierstufiger Lüfter verbaut, sodass hier lediglich in 25% Schritten geregelt werden kann. Noch drastischer zeigt sich die Situation für den Entfeuchtungsfall. Dieses Gerät verfügt lediglich über zwei Stufen. Eine kontinuierliche Regelung ist daher nicht möglich. Aufgrund des hardwaretechnischen Aufbaus ist es ebenfalls nicht möglich, die Regelung quasi-kontinuierlich, beispielsweise durch Pulsbreitenmodulation des Stellsignals, zu realisieren. Im Rahmen weiterer Arbeiten soll das Be- bzw. Entfeuchtungskonzept auf Peltierbasis umgestellt werden, sodass eine kontinuierliche Regelung möglich wird (siehe Ausblick in Kapitel 7). Für die Untersuchungen im Rahmen der folgenden CFD-Simulationen wird die Leistung als kontinuierlich regelbar angenommen.

Die Vorgabe der Randbedingungen über den kompletten Simulationszeitraum, sowie die Ansteuerung der Aktoren lassen sich standardmäßig in der

Ansys Workbench nur durch einfache funktionale Zusammenhänge oder durch vorgegebene Randbedingungen, wie zum Beispiel Dirichlet- Randbedingungen, festlegen. Um später den Regelungsalgorithmus implementieren und das Außenwetter Szenario vorgeben zu können, wurde die *Ansys Co Fluent Unit* als Schnittstelle genutzt. Dabei handelt es sich um eine Schnittstelle zur Anwenderprogrammierung (kurz: API), mit der aus Matlab über eine *ActiveX* Komponente Zugriff zur Ansys Konsole hergestellt werden kann. Hierdurch lassen sich Parameter, wie beispielsweise Außentemperatur oder Befeuchterleistung während der Simulation anpassen. Abbildung 6.9 zeigt den Aufbau der Versuchsumgebung mit allen notwendigen Schnittstellen.

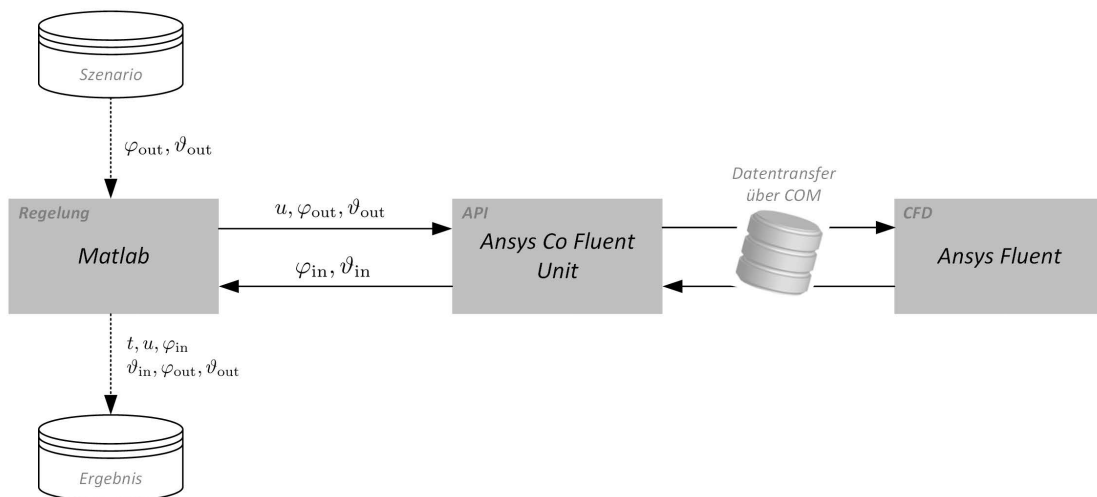


Abbildung 6.9: Programmtechnischer Versuchsaufbau mit den notwendigen Schnittstellen.

6.3 Systemidentifikation

Nachdem der Aufbau der Versuchsumgebung beschrieben wurde, werden nun die vorgestellten Verfahren aus den vorhergehenden Abschnitten angewandt. Hierzu muss zunächst das Systemmodell identifiziert werden.

6.3.1 Bestimmung der Modellstruktur

Zur Modellierung der relativen Luftfeuchte innerhalb eines Raumes kann die Definition des Prototypen eines generellen Strömungsproblems aus Gleichung (3.1.11) verwendet werden. Da diese Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen ist, wird die Gleichung des Prototypen hier nochmals wiederholt:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla (\rho \underline{v} \phi) = \nabla (\Gamma \nabla \phi) + Q_\phi \quad (6.3.1)$$

Die interessierende Strömungsgröße ϕ stellt in diesem Fall die relative Luftfeuchte φ dar. Allerdings kommen neben dieser Strömungsgröße auch weitere Größen in obiger Gleichung vor, für die das generelle Strömungsproblem gelöst werden muss. Hier ist beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld \underline{v} zu nennen, welches über die Navier-Stokes Gleichungen gegeben ist. Des Weiteren hängen gewisse Parameter, wie beispielsweise die Dichte ρ oder der Diffusionskoeffizient Γ , von der Temperatur ab, welche somit auch eine Strömungsgröße darstellt. Für eine detaillierte Betrachtung, wie es bei CFD-Simulationen üblich ist, entsteht somit ein partielles Differentialgleichungssystem aus den drei Geschwindigkeitskomponenten in x -, y - und z -Richtung, aus dem Temperaturfeld und der Lösung für die eigentlich erwünschte Strömungsgröße der Luftfeuchte.

Durch die örtliche Diskretisierung im hier verwendeten Ansatz würde im Fall der dynamischen Betrachtung aller fünf Strömungsgrößen jeder Gitterpunkt fünf ordinäre Differentialgleichungen in das Gesamtmodell einfließen lassen, was zu einem sehr umfangreichen Modell führt. Werden beispielsweise fünf Messpunkte im Raum betrachtet, resultiert bereits ein örtlich verteiltes TS Fuzzy System mit 25 Zuständen. Diese Tatsache ist allerdings in der zonalen Modellierung ebenfalls bekannt [7, 39], und daher kein individuelles Problem des vorgestellten Ansatzes. Um diese Problematik zu umgehen, werden in der zonalen Modellierung häufig zwei Annahmen getroffen [7, 39]. Da die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes in geschlossenen Räumen häufig sehr gering ist, wird das Geschwindigkeitsfeld meist als konstant angenommen.

Es wird somit ein fixes, oft aus CFD-Simulationen abgeleitetes, Geschwindigkeitsfeld verwendet. Für die praktische Anwendung entgeht man somit zudem der Problematik, dass Geschwindigkeitsfeld messtechnisch erfassen zu müssen, da die Geschwindigkeitskomponenten bei dieser Betrachtung nicht mehr als Strömungsgrößen auftreten.

Folglich wurden die zu betrachtenden Strömungsgrößen nun bereits von fünf auf zwei reduziert. In [39] wird zudem die örtliche Verteilung der Temperatur vernachlässigt, da hier die örtliche Verteilung nicht besonders ausgeprägt und für Menschen fast nicht wahrnehmbar ist. Diese Annahme wird durch die untere Darstellung in Abbildung 6.6 unterstützt. Im Mittel liegt die maximale örtliche Abweichung bei unter $\Delta_x \vartheta < 0.5^\circ K$. Es wird daher auf eine örtlich verteilte Betrachtung verzichtet und lediglich eine einheitliche Raumtemperatur betrachtet. Somit ergibt sich die Anzahl der Modellgleichungen aus der Anzahl der Gitterpunkte N_{Grid} und der dynamischen Temperaturbetrachtung zu $N_M = N_{\text{Grid}} + 1$.

Im Quellterm des Prototyps aus Gleichung (6.3.1) können allerdings noch weitere Größen in Form von Feuchtequellen beziehungsweise Feuchtesenken auftreten. Dies könnten beispielsweise Werte des Außenklimas sein. Um herauszufinden, welche Größen im Rahmen der Systemidentifikation Informationen über die notwendige Struktur des Modells liefern, wird daher eine Lipschitz-Analyse, wie in Abschnitt 4.4.2 erläutert, durchgeführt. Ziel ist es dabei, ein Modell für die relative Luftfeuchte an einem bestimmten Punkt i im diskretisierten Raum zu identifizieren. Hierzu werden alle vorhanden Messdaten in der Analyse verwendet. Diese sind

- φ : die relative Luftfeuchte am Punkt selbst
- $\bar{\vartheta}$: eine gemittelte Raumtemperatur
- $\varphi^{\Delta x+r}$: die relative Luftfeuchte benachbarter Raumpunkte. Dabei ist r der diskrete Einzugsradius. Für $r = 1$ gelten nur direkte Nachbarn aus allen drei Dimensionen, usw.

- $\vartheta^{\Delta x+r}$: die Temperatur benachbarter Raumpunkte. Hier wurde auf eine Mittelung der Raumtemperatur verzichtet und die örtliche Verteilung berücksichtigt.
- φ_a : die relative Luftfeuchte aussen
- ϑ_a : die Temperatur aussen

Die Analyse wurde bis zu einem diskreten Einzugsradius von $r = 1 \dots 4$ durchgeführt. Die Ergebnisse in Form der Lipschitz-Zahlen zeigt Abbildung 6.10.

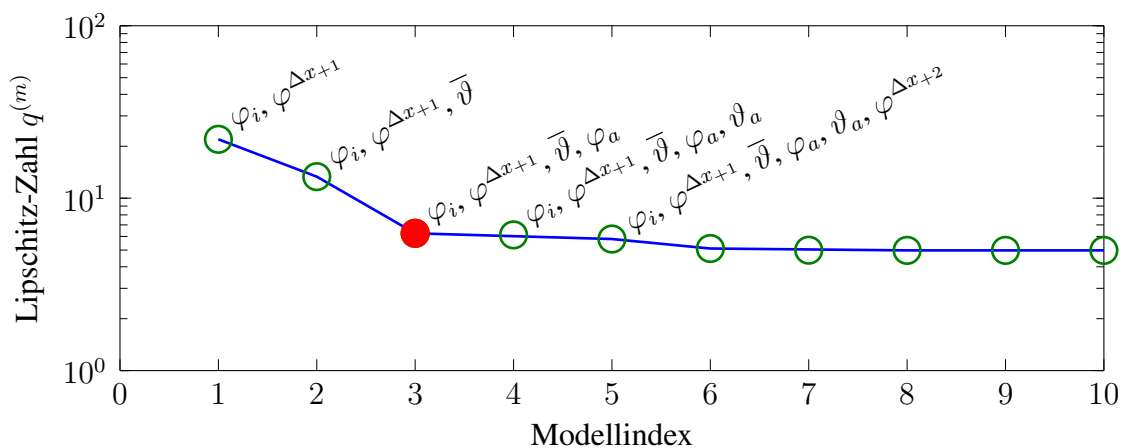


Abbildung 6.10: Lipschitz-Analyse der verfügbaren Messdaten.

Die Beschriftungen an den Datenpunkten geben Auskunft über die einbezogenen Daten. Da die hinteren Datenpunkte keine Relevanz im Rahmen der Lipschitz-Analyse haben, ist die Beschriftung hier nicht erforderlich. Bei der Lipschitz-Analyse ist der sogenannte „*Knickpunkt*“ gesucht, da die Lipschitz-Zahlen eine Auskunft über den, in den untersuchten Daten vorhandenen Informationsgehalt geben. Nach dem Knickpunkt ist keine merkliche Verbesserung bei Einbeziehung weiterer Messdaten mehr zu erzielen. Im vorliegenden Fall aus Abbildung 6.10 ist der Knickpunkt (rot markiert) bei dem Modellindex 3 zu finden. Da es sich um eine logarithmische Darstellungsweise handelt, sind die Lipschitz-Zahlen vor dem Knickpunkt weitaus höher,

was auf einen deutlich niedrigeren Informationsgehalt schließen lässt. Nach dem Knickpunkt ist allerdings kaum mehr eine Verbesserung festzustellen. Die zur Systemidentifikation zu verwendenden Messgrößen sind daher die relative Luftfeuchte φ_i am Punkt selbst, die relative Luftfeuchte in direkter Nachbarschaft zum betrachteten Gitterpunkt $\varphi^{\Delta x+1}$, die mittlere Raumtemperatur $\bar{\vartheta}$ und die relative Luftfeuchte aussen φ_a . Durch die Lipschitz-Analyse wird ebenfalls die Annahme bestätigt, dass eine örtlich verteilte Betrachtung der Temperatur nicht erforderlich ist

(Modellindex 10), da diese keine nennenswerten Mehrinformationen gegenüber dem Temperaturmittelwert enthält.

Folglich reduziert sich mit den getroffenen Annahmen und Ergebnissen das zu betrachtende Strömungsproblem auf die Bilanzierung der relativen Luftfeuchte:

$$\frac{\partial \rho(\vartheta) \varphi}{\partial t} = \nabla (\Gamma(\vartheta) \nabla \varphi) - \nabla \rho(\vartheta) \underline{v} \varphi + Q_\varphi(\bar{\vartheta}, \varphi_a, u_c) \quad (6.3.2)$$

Der Quellterm Q_φ umfasst hierbei alle Feuchtequellen und Feuchtesenken des betrachteten Objektes. Hierzu zählt beispielsweise die Konvektion der Feuchtigkeit des Außenklimas durch die Gebäudehülle ins Innere des Gebäudes, Speichereffekte von Materialien im Raum, aktive Klimatisierungsgeräte, usw. Da der Quellterm einen sehr individuellen Charakter aufweist, je nach Eigenschaft der betrachteten Applikation, wird dieser als Funktion der relevanten Größen $\varphi_{in}, \vartheta_{in}, \varphi_a, \vartheta_a$ und aktiver Steuergröße u notiert. Der Quellterm kann lineare und nichtlineare (beispielsweise Konvektion durch die Gebäudehülle) Bestandteile aufweisen. Um die örtliche Diskretisierung durchführen zu können, wird die Operatorschreibweise durch die kartesischen Koordinaten ersetzt:

$$\begin{aligned} \rho(\vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma(\vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma(\vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma(\vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ & - \rho(\vartheta) v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho(\vartheta) v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho(\vartheta) v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + Q_\varphi(\bar{\vartheta}, \varphi_a, u_c) \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Da die Temperatur als örtlich einheitlich betrachtet wird, ist auch der Diffusionskoeffizient Γ nicht ortsabhängig. Somit lassen sich die beiden Nabla-Operatoren zur Divergenz des Gradienten zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \rho(\vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \Gamma(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ & - \rho(\vartheta) v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho(\vartheta) v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho(\vartheta) v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + Q_\varphi(\bar{\vartheta}, \varphi_a, u_c) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Um die örtlichen Diskretisierungsmethoden aus Abschnitt 3.1 anwenden zu können, wird ein Diskretisierungsgitter benötigt. Abbildung 6.11 zeigt ein dreidimensionales Gitter, sowie die zugehörige Indizierung der Gitterpunkte.

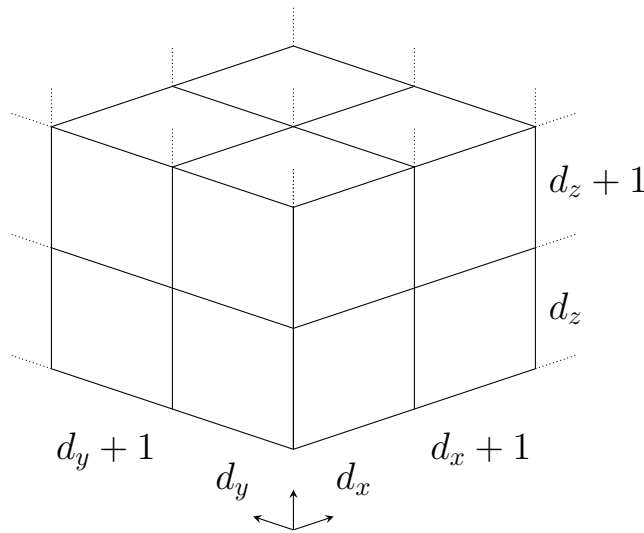


Abbildung 6.11: Indizierung der Gitterpunkte eines dreidimensionalen Gitters

Um nun die Strömungsgröße an einem bestimmten Gitterpunkt anzusprechen, werden drei Indizes d_x , d_y , d_z benötigt. Für eine einfachere Berechnung wird ein äquidistantes Gitter in alle drei Richtungen mit der Diskretisierungsschrittweite Δ_G verwendet. Durch den Differenzenquotienten aus Abschnitt 3.1 kann die partielle Differentialgleichung (6.3.4) für einen Gitterpunkt φ_{d_x, d_y, d_z} approximiert werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{d_x, d_y, d_z} &= \Gamma(\vartheta) \left(\frac{\varphi_{d_x-1, d_y, d_z} + \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} - 2\varphi_{d_x, d_y, d_z} + \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} + \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} + \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} + \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} - 4\varphi_{d_x, d_y, d_z}}{\Delta_G^2} \right) \\
&\quad - \rho(\vartheta) \left(v_x \frac{\varphi_{d_x-1, d_y, d_z} - \varphi_{d_x+1, d_y, d_z}}{2\Delta_G} + v_y \frac{\varphi_{d_x, d_y-1, d_z} - \varphi_{d_x, d_y+1, d_z}}{2\Delta_G} \right. \\
&\quad \left. + v_z \frac{\varphi_{d_x, d_y, d_z-1} - \varphi_{d_x, d_y, d_z+1}}{2\Delta_G} \right) + Q_\varphi(\cdot) \\
&= \frac{\Gamma(\vartheta)}{\Delta_G^2} \left(\varphi_{d_x-1, d_y, d_z} + \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} - 2\varphi_{d_x, d_y, d_z} + \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} + \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} \right. \\
&\quad \left. - 2\varphi_{d_x, d_y, d_z} + \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} + \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} - 2\varphi_{d_x, d_y, d_z} \right) - \frac{\Delta_G \cdot \rho(\vartheta)}{2\Delta_G^2} \\
&\quad \left(v_x \varphi_{d_x-1, d_y, d_z} - v_x \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} + v_y \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} - v_y \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} + \right. \\
&\quad \left. v_z \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} - v_z \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} \right) + Q_\varphi(\cdot) \tag{6.3.5} \\
&= \frac{\Gamma(\vartheta)}{\Delta_G^2} \left(-6\varphi_{d_x, d_y, d_z} + \varphi_{d_x-1, d_y, d_z} + \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} + \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} + \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} + \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} \right) - \frac{\Delta_G \cdot \rho(\vartheta)}{2\Delta_G^2} \left(v_x \varphi_{d_x-1, d_y, d_z} - v_x \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} + \right. \\
&\quad \left. v_y \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} - v_y \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} + v_z \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} - v_z \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} \right) + Q_\varphi(\cdot) \\
&= \frac{1}{2\Delta_G^2} \left(-12\Gamma(\vartheta)\varphi_{d_x, d_y, d_z} + (2\Gamma(\vartheta) - \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_x) \cdot \varphi_{d_x-1, d_y, d_z} + \right. \\
&\quad (2\Gamma(\vartheta) + \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_x) \cdot \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} + (2\Gamma(\vartheta) - \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_y) \cdot \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} + \\
&\quad (2\Gamma(\vartheta) + \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_y) \cdot \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} + (2\Gamma(\vartheta) - \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_z) \cdot \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} + \\
&\quad \left. (2\Gamma(\vartheta) + \Delta_G \cdot \rho(\vartheta)v_z) \cdot \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} \right) + Q_\varphi(\cdot)
\end{aligned}$$

Da sich die Koeffizienten der betrachteten Knotenpunkte aus linearen und nichtlinearen Anteilen zusammensetzen, werden diese aufgeteilt und zudem eine nichtlineare Funktion $\aleph(\cdot)_{d_x, d_y, d_z}$ eingeführt, die von den relevanten Größen φ_a , φ_{d_x, d_y, d_z} , $\bar{\vartheta}$ und der Steuergröße u abhängt und somit die nichtlinearen Anteile zusammenfasst:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{d_x, d_y, d_z} = & \alpha_{d_x, d_y, d_z} \varphi_{d_x, d_y, d_z} + \alpha_{d_x-1, d_y, d_z} \varphi_{d_x-1, d_y, d_z} + \alpha_{d_x+1, d_y, d_z} \varphi_{d_x+1, d_y, d_z} + \\ & \alpha_{d_x, d_y-1, d_z} \varphi_{d_x, d_y-1, d_z} + \alpha_{d_x, d_y+1, d_z} \varphi_{d_x, d_y+1, d_z} + \alpha_{d_x, d_y, d_z-1} \varphi_{d_x, d_y, d_z-1} \\ & + \alpha_{d_x, d_y, d_z+1} \varphi_{d_x, d_y, d_z+1} + \beta_{1, d_x, d_y, d_z} u + \beta_{2, d_x, d_y, d_z} \bar{\vartheta} + \beta_{3, d_x, d_y, d_z} \varphi_a \\ & + \aleph_{d_x, d_y, d_z}(\cdot) \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Bei obiger Herleitung wurde von lediglich einer aktiven beeinflussbaren Steuergröße u ausgegangen. Es ist leicht ersichtlich, dass im Falle mehrerer Aktoren und somit mehrerer Steuergrößen hier zusätzliche Summanden einzuführen sind. Gleichung (6.3.6) lässt sich nun in ein nichtlineares Matrix-Vektor Modell überführen. Hierzu werden die Strömungsgrößen an den einzelnen Gitterpunkten zunächst im Lösungsvektor zusammengefasst, wobei für die nachfolgende Herleitung die Reihenfolge sehr entscheidend ist.

$$\varrho = \left[\varphi_{1,1,1} \quad \dots \quad \varphi_{1,1,N_z} \quad \varphi_{1,2,1} \quad \dots \quad \varphi_{1,N_y,N_z} \quad \dots \quad \varphi_{N_x,N_y,N_z} \right]^T \quad (6.3.7)$$

Hierbei sind N_x , N_y und N_z die Anzahl der Gitterpunkte in jeweiliger Richtung. Mit dieser Festlegung der Indizierung lässt sich nun die Matrix-Vektor Formulierung aufstellen:

$$\dot{\varrho} = \mathbf{A}\varrho + \mathbf{B}_c u_c + \mathbf{B}_{uc} \mathbf{u}_{uc} + \aleph(\cdot) \quad (6.3.8)$$

Dabei ist u_c der steuerbare Eingang der Aktoren und $\mathbf{u}_{uc} = \begin{bmatrix} \varphi_a & \bar{\vartheta} \end{bmatrix}$ die nicht-steuerbaren Eingänge. Die Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N_x \cdot N_y \cdot N_z) \times (N_x \cdot N_y \cdot N_z)}$ setzt sich aus den linearen Koeffizienten der zugehörigen Strömungsgrößen zusammen. Mit der festgelegten Sortierung der Gitterpunkte im Lösungsvek-

tor \mathbf{g} entsteht eine Blocktridiagonal Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_1 & \overline{\mathbf{D}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{D}}_2 & \mathbf{A}'_2 & \overline{\mathbf{D}}_2 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{D}}_3 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \overline{\mathbf{D}}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{D}}_n & \mathbf{A}'_n \end{bmatrix}, \quad (6.3.9)$$

Die Blocktridiagonalmatrix \mathbf{A} enthält weitere Untermatrizen \mathbf{A}'_{d_x} , $\overline{\mathbf{D}}_{d_x}$ und $\underline{\mathbf{D}}_{d_x}$. Für ein besseres Verständnis der Zusammensetzung der Systemmatrix \mathbf{A} , zeigt Abbildung 6.12 einen Ausschnitt aus dem Besetzungsschema der Matrix. Die Matrizen $\mathbf{A}'_{d_x} \in \mathbb{R}^{(N_y \cdot N_z \times N_y \cdot N_z)}$ werden entsprechend der ersten Dimension g durchnummeriert. Zu jeder dieser Blockmatrizen gehört, sofern \mathbf{A}'_{d_x} nicht selbst am Rand liegt, eine obere und eine untere Diagonalmatrix $(\overline{\mathbf{D}}_{d_x}, \underline{\mathbf{D}}_{d_x}) \in \mathbb{R}^{(N_y \cdot N_z \times N_y \cdot N_z)}$ (im Bild blau hinterlegt).

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{D}}_{d_x} &= \text{diag} \left(\overline{d}_1 \quad \overline{d}_2 \quad \cdots \quad \overline{d}_{N_y \cdot N_z} \right) \\ \underline{\mathbf{D}}_{d_x} &= \text{diag} \left(\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \cdots \quad \underline{d}_{N_y \cdot N_z} \right) \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Bei der Matrix \mathbf{A}'_{d_x} handelt es sich wiederum um eine Blocktridiagonalmatrix. Sie setzt sich aus den Bandmatrizen $\mathbf{T}_{d_x, d_y} \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$ (im Bild grau hinterlegt), $N_y - 1$ oberen Diagonalmatrizen $\overline{\mathbf{D}}_{A', d_x, d_y} \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$ und $N_y - 1$ unteren Diagonalmatrizen $\underline{\mathbf{D}}_{A', d_x, d_y} \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$ zusammen:

$$\mathbf{A}'_{d_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{d_x, 1} & \overline{\mathbf{D}}_{A', d_x, 1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{D}}_{A', d_x, 2} & \mathbf{T}_{d_x, 2} & \overline{\mathbf{D}}_{A', d_x, 2} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{D}}_{A', d_x, 3} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \overline{\mathbf{D}}_{A', d_x, N_y - 1} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{D}}_{A', d_x, N_y} & \mathbf{T}_{g, N_y} \end{bmatrix} \quad (6.3.11)$$

	111	112	113	121	122	123	131	132	133	211	212	213	221	222	223	231	232	233	311	312	313	321	322	323	331	332	333
111	x	x		x						x																	
112	x	x	x		x						x																
113		x	x				x					x															
121	x			x	x		x					x															
122		x		x	x	x		x					x														
123			x		x	x			x						x												
131				x			x	x								x											
132					x		x	x	x								x										
133						x		x	x								x										
211	x									x	x		x						x								
212		x								x	x	x		x						x							
213			x							x	x	x			x						x						
221				x						x			x	x		x						x					
222					x					x	x		x	x	x		x						x				
223						x					x		x	x			x							x			
231							x					x			x	x									x		
232								x					x		x	x	x									x	
233									x						x		x	x									x
311										x									x	x		x					
312											x								x	x	x		x				
313												x							x	x	x			x			
321													x						x		x	x		x			
322														x					x		x	x	x		x		
323															x				x		x	x			x		
331																x					x			x	x		
332																	x				x			x	x	x	
333																		x				x			x	x	x

Abbildung 6.12: Besetzungsschema der blocktridiagonalen Systemmatrix A .

Dabei haben die Bandmatrizen T_{d_x, d_y} die Form:

$$T_{d_x, d_y} = \begin{bmatrix} t_{d_x, d_y, 1} & \bar{t}_{d_x, d_y, 2} & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{t}_{d_x, d_y, 1} & t_{d_x, d_y, 2} & \bar{t}_{d_x, d_y, 3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \underline{t}_{d_x, d_y, 2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \bar{t}_{d_x, d_y, N_z} \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{t}_{d_x, d_y, N_z-1} & t_{d_x, d_y, N_z} \end{bmatrix} \quad (6.3.12)$$

Das angegebene Schema kann als Konstruktionsregel für das dreidimensionale örtlich verteilte System verwendet werden. Alle Matrixeinträge der Untermatrizen T_{d_x, d_y} , \bar{D}_{A', d_x, d_y} und $\underline{D}_{A', d_x, d_y}$ sind Repräsentanten der Koeffizienten aus Gleichung (6.3.6). Für die Eingangsmatrizen gilt:

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \beta_{1,1,1,1} \\ \beta_{1,1,1,2} \\ \vdots \\ \beta_{1,1,1,N_z} \\ \beta_{1,1,2,1} \\ \vdots \\ \beta_{1,1,N_y,N_z} \\ \vdots \\ \beta_{1,N_x,N_y,N_z} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{uc} = \begin{bmatrix} \beta_{2,1,1,1} & \beta_{3,1,1,1} \\ \beta_{2,1,1,2} & \beta_{3,1,1,2} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{2,1,1,N_z} & \beta_{3,1,1,N_z} \\ \beta_{2,1,2,1} & \beta_{3,1,2,1} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{2,1,N_y,N_z} & \beta_{3,1,N_y,N_z} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{2,N_x,N_y,N_z} & \beta_{3,N_x,N_y,N_z} \end{bmatrix} \quad (6.3.13)$$

Und schlussendlich folgt mit den hergeleiteten Matrizen und Vektoren und der nichtlinearen Systemdarstellung aus Gleichung (6.3.8) das örtlich verteilte TS Fuzzy System:

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}} = \sum_{i=1}^{N_R} \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{z}) \odot [\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho} + \mathbf{B}_{c,i} u_c + \mathbf{B}_{uc,i} \mathbf{u}_{uc} + \mathbf{a}_i] \quad (6.3.14)$$

Da es für die datengetriebene Modellbildung im Folgenden erheblich einfacher ist, ein diskretes Modell zu identifizieren (da beispielsweise keine Zeitableitungen notwendig sind), wird hier auf die zeitdiskrete Systemdarstellung zurückgegriffen:

$$\boldsymbol{\varrho}[k+1] = \sum_{i=1}^{N_R} \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{z}) \odot [\mathbf{A}_i \boldsymbol{\varrho}[k] + \mathbf{B}_{c,i} u_c[k] + \mathbf{B}_{uc,i} \mathbf{u}_{uc}[k] + \mathbf{a}_i] \quad (6.3.15)$$

6.3.2 Parameteridentifikation

Um einen nichtlinearen Systemansatz zu rechtfertigen, bleibt stets abzuwägen, ob dieser Vorteile gegenüber einem linearen Systemansatz erzielen kann. Bei Betrachtung der partiellen Differentialgleichungen sind gewisse nichtlineare Beziehungen zu erkennen, vor allem in der Abhängigkeit bestimmter Koeffizienten von den relevanten Strömungsgrößen. Um herauszufinden, ob ein nichtlinearer Ansatz Vorteile bei der Modellierung der

Raumluftfeuchte bringt, wurde daher ein Nichtlinearitätstest durchgeführt. Hierzu wurde die Funktion *isnlarx* aus der *System Identification Toolbox* von MATLAB verwendet [135]. Die Funktion testet einen gegebenen Datensatz daraufhin, ob signifikante Nichtlinearitäten enthalten sind. Dafür wird ein lineares ARX-Modell identifiziert und mit einem nichtlinearen ARX-Modell verglichen. Die Identifikation des nichtlinearen ARX-Modells (NARX) wird dabei in Form einer Baumpartitionierung, ähnlich dem LOLIMOT-Verfahren, durchgeführt, was ein Grund für die Wahl dieses Befehls ist. Da jede Zeile in dem örtlich verteilten TS Fuzzy System der Modellgleichung eines Gitterpunktes entspricht und zudem in NARX-Form vorliegt, wurde der Test auf Nichtlinearitäten auf die einzelnen Gitterpunkte angewandt. Dabei war die Ausgangsgröße die zu modellierende relative Luftfeuchte am Punkt selbst. Als Eingangsgrößen wurden die Größen gewählt, die im Rahmen der Lipschitz-Analyse als signifikant ermittelt wurden. Das Ergebnis des Nichtlinearitätstests fiel für alle Gitterpunkte ähnlich aus. Einen Auszug zeigt Beispiel 6.1.

Beispiel 6.1: Nichtlinearitätstest

```
Nonlinearity is detected in data set DATA
Detection ratio: 6.5751
Estimated discrepancy of the linear model found: 0.036264
Estimated noise standard deviation: 0.057232
```

Entscheidend bei der Interpretation des Ergebnisses ist der Wert *Detection ratio*. Er gibt Auskunft über die Signifikanz des Tests (siehe [135] für weitere Informationen). Hierbei gilt:

- Detection ratio $< 0,5$: Es konnte keine Nichtlinearität festgestellt werden
- Detection ratio ≈ 1 : Es kann keine zuverlässige Aussage über die Nichtlinearität getroffen werden. Der Fehler des linearen Modells wird zum Großteil durch Rauschen hervorgerufen.

- Detection ratio > 2 : Es konnte eine signifikante Nichtlinearität festgestellt werden, die nicht durch verrauschte Daten hervorgerufen wird, sondern durch nichtlineare funktionale Zusammenhänge der Regressoren

Anhand dieser Ergebnisse ist somit eine deutliche Verbesserung der Modellgüte eines nichtlinearen Systemansatzes gegenüber einem linearen Systemansatz zu erwarten.

Die datengetriebene Modellbildung für örtlich verteilte TS Fuzzy Systeme wird, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, durch ein iterativ wachsendes Verfahren durchgeführt, welches für konzentriert parametrische Systeme in der Literatur unter dem Namen LOLIMOT zu finden ist. Beginnend mit einem einfachen linearen Systemmodell wird der Arbeitsraum, welcher durch alle relevanten Systemgrößen gebildet wird, in sämtliche Richtungen einzeln orthogonal geteilt. Die dadurch entstandenen neuen TS Fuzzy Modelle werden durch eine Fehlerfunktion bewertet und die beste Teilung wird übernommen (vergleiche Abbildung 4.30).

Eine ähnliche Motivation wie für die Einführung des Hadamard-Produktes für örtlich verteilte TS Fuzzy Systeme gilt nun ebenfalls bei der Anpassung des Identifikationsalgorithmus. Betrachtet wird zunächst zum besseren Verständnis das folgende nichtlineare konzentriert-parametrische System:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_3} + u_1 \\ 1 + x_2^2 + u_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad (6.3.16)$$

Die Zustandsgrößen x_2 und x_3 kommen hierbei nichtlinear vor, wohingegen x_1 sowie beide Eingangsgrößen u_1 und u_2 lediglich linear vorkommen. Beim klassischen LOLIMOT-Algorithmus wird nun nacheinander in alle möglichen Dimensionen (und somit nach allen Größen x_1, x_2, x_3, u_1 und u_2) des Arbeitsraumes eine orthogonale Teilung durchgeführt. Eine Aufteilung der linearen Größen in zwei getrennte lokale Modelle kann keine Verbesserung erzielen, da beide resultierenden Systeme das gleiche lineare System

beschreiben würden. Somit werden neue Partition lediglich durch Teilung in Richtung der Größen x_2 und x_3 gebildet. Dabei unterscheiden sich die nichtlinearen Strukturen der Wurzelfunktion und der quadratischen Funktion erheblich voneinander, sodass die Partitionen in beiden Fällen unterschiedlich verteilt werden.

Im Falle der örtlich verteilten Systeme kommt nun die Abhängigkeit der nichtlinearen Strukturen von den Größen an den einzelnen Ortskoordinaten hinzu. Ein nichtlineares örtlich verteiltes System kann dann beispielsweise gegeben sein durch:

$$\dot{q} = \frac{1}{\Delta x^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \\ \varrho_4 \\ \varrho_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{\varrho_1} \\ \sqrt{\varrho_2} \\ \sqrt{\varrho_3} \\ \sqrt{\varrho_4} \\ \sqrt{\varrho_5} \end{bmatrix} \quad (6.3.17)$$

Der nichtlineare Vektor entsteht dabei zwangsläufig bei der örtlichen Diskretisierung eines nichtlinearen örtlich verteilten Systems und weist in jeder Zeile die gleiche Struktur auf, in diesem Beispiel eine Wurzelfunktion. Bei der klassischen Vorgehensweise wird nun in jeder Iteration die Teilung in alle Richtungen ϱ_1 bis ϱ_5 geprüft und lediglich die beste Teilung hinsichtlich einer Fehlerfunktion übernommen. Es liegt also ausschließlich an der Verteilung der experimentell gewonnen Identifikationsdaten nach welcher Dimension eine Teilung vollzogen wird. Bei konzentriert-parametrischen Systemen ist diese Vorgehensweise sinnvoll, da meist keine Informationen über die Struktur mögliche nichtlinearer Einflüsse vorliegen. Im Falle örtlich verteilter Systeme sind die nichtlinearen Einflüsse zwar ebenfalls unbekannt, allerdings ist bekannt, dass sie in allen Knotenpunkten strukturell gleich vorkommen, lediglich mit unterschiedlichem Argument. Es liegt daher nahe, eine vollzogene Teilung für alle Knotenpunkte gleichermaßen zu übernehmen.

Quadratische Systeme

Im Folgenden wird zunächst der, zumindest bezüglich der Regelung, einfachere Fall der quadratischen Systeme behandelt, bei dem ebenso viele Stellgrößen wie Regelgrößen vorhanden sind. Hierfür wurden jeweils vier Be- und Entfeuchtungsgeräte, sowie vier Messstellen und ein Außensensor im Landgrafenzimmer des Schloss Fasanerie simuliert, was einen praxisnahen Versuchsaufbau darstellt. Die Anordnung der Geräte zeigt Abbildung 6.13.

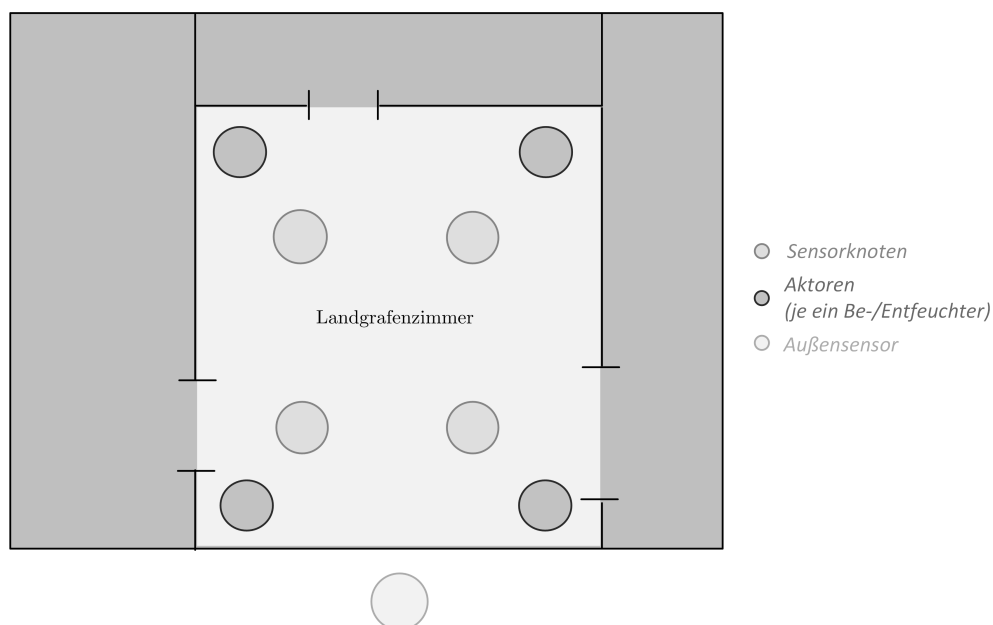


Abbildung 6.13: Schema des Aufbaus der CFD-Simulationen zur Datengenerierung.

Für die Datengenerierung zur anschließenden Identifikation wurde ein amplitudenmoduliertes PRBS Anregungssignal verwendet, wie es in Abschnitt 4.4.1 bereits beschrieben wurde. Beispielhaft zeigt Abbildung 6.14 einen Auszug des Anregungssignals für einen Aktorstandort. An jedem Aktorstandort aus Abbildung 6.13 wird je ein Befeuchter und ein Entfeuchter simuliert. Die Aktoren lassen sich von 0%...100% ansteuern und sind gemäß dem Datenblatt [28] in ihrer Leistung parametrisiert worden. Da ein gleichzeitiger Betrieb von Be- und Entfeuchter aus ökonomischer Sicht unerwünscht ist,

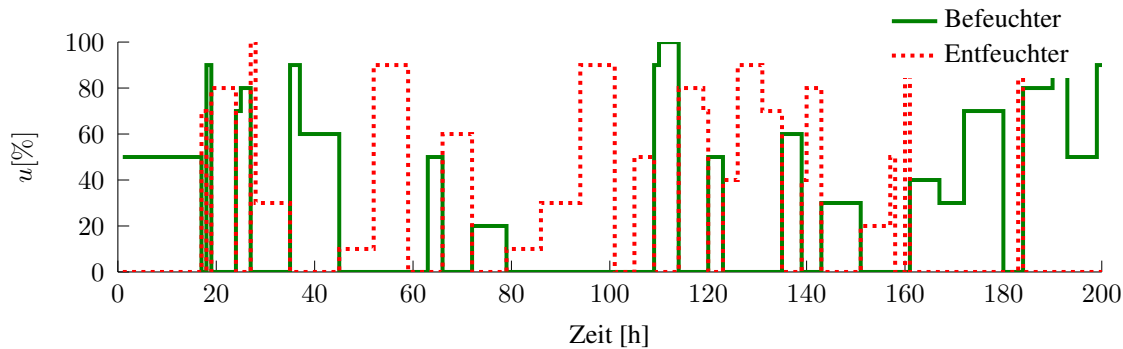


Abbildung 6.14: Auszug des Anregungssignals für einen Aktorstandort.

wird das Anregungssignal dementsprechend gestaltet. Neben den Aktoren wird ein Außenklimaszenario verwendet, das aus einer einjährigen Messung in Schloss Fasanerie entstanden ist. Für die Untersuchungen wird das Szenario aus Temperatur und relativer Luftfeuchte verwendet.

Für die Bewertung des Modells werden jeweils die Simulationsergebnisse betrachtet. Das identifizierte Modell erhält lediglich die vorhandenen Eingangssignale, in diesem Fall die Außenfeuchte φ_a und die Stellgrößen der Aktoren u_1 bis u_8 (vier Befeuchter und vier Entfeuchter). Mit diesen Informationen wird ein komplettes Jahr simuliert und für die Ermittlung der Modellgüte mit den CFD-erzeugten Daten verglichen.

Bei der datengetriebenen Modellbildung und insbesondere bei wachsenden Strukturen wie sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, stellt sich die Frage nach der optimalen Modellkomplexität. Im Falle der TS Fuzzy Systeme ist dies die Frage nach der optimalen Anzahl an lokalen linearen Teilmodellen sowie der notwendigen Anzahl an Knotenpunkten. Die Anzahl der Knotenpunkte ist bei der Betrachtung quadratischer Systeme irrelevant, da diese durch die Anzahl von Aktoren und Sensoren gegeben ist.

Ein bekanntes Problem bezüglich der Modellkomplexität ist der sogenannte Bias-Varianz-Kompromiss [89]. Werden zuviele Variablen in einem Modell verwendet und diese letztlich trainiert, besteht die Gefahr des *Overfittings*, bei dem das Modell die Trainingsdaten zwar sehr gut repräsentiert, allerdings neben dem zugrundeliegenden datenerzeugenden Prozess ebenfalls

sämtliche Rauschprozesse abbildet, was unerwünscht ist. Im Gegensatz dazu besteht bei der Verwendung zu weniger Variablen die Gefahr des *Underfitting*. Das Modell ist dann nicht flexibel genug um die Daten abbilden zu können. Das beste Modell stellt also hinsichtlich der Modellkomplexität einen Kompromiss aus Bias- und Varianz-Fehler dar.

Zur Ermittlung der optimalen Modellkomplexität wird der zur Identifikation generierte Datensatz in einen Trainings- und einen Validierungsdatensatz unterteilt. Wie der Name bereits sagt, dient der Trainingsdatensatz lediglich zum Modelltraining. Die Abschätzung der Modellgüte wird über den Validierungsdatensatz durchgeführt. Da die Menge an zur Verfügung stehenden Daten häufig stark begrenzt ist, wird oft auf statistische Verfahren zurückgegriffen. Die bekanntesten sind die Kreuzvalidierung und sogenannte Informationskriterien, von denen das Akaike Informationskriterium (AIC) und das Bayes'sche Informationskriterium (BIC) die bekanntesten darstellen [89]. Bei der Kreuzvalidierung wird der Datensatz in N_{KV} kleinere Datenpakete unterteilt. Davon werden zufällig $N_{KV} - 1$ Datenpakete zum Training verwendet und das übrige Datenpaket zur Validierung. Im Anschluss werden neue Datenpakete zum Training gewählt und dementsprechend ein neues Datenpaket zur Validierung. Dieses Vorgehen lässt sich fortsetzen. Es wird daher von der k -fach Kreuzvalidierung gesprochen. Diese wird häufig verwendet, wenn wenige Daten zu Verfügung stehen, um diese effektiv zu nutzen.

Bei den Informationskriterien hingegen wird eine erwartete Distanz zwischen dem datenerzeugenden Prozess und dem Modell abgeschätzt. Die Abschätzung erfolgt dabei über die sogenannte Kullback-Leibler-Divergenz (siehe [136] für tiefergehende Informationen). Für das Akaike Informationskriterium (AIC) folgt:

$$AIC = -2\mathcal{L}(\hat{\Theta}|y) + 2N_p \quad (6.3.18)$$

mit der Anzahl an zu schätzenden Parametern N_p . Für das Bayessche Informationskriterium gilt:

$$BIC = -2\mathcal{L}(\hat{\Theta}|y) + \log N_d N_p \quad (6.3.19)$$

wobei N_d die Anzahl an Stichproben beziehungsweise Messungen darstellt. Für die Likelihood Funktion gilt in beiden Fällen:

$$-2\mathcal{L}(\hat{\Theta}|\varphi) = N_d \ln \hat{\sigma}_N^2 = N_d \ln \left(\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (\varphi(i) - \hat{\varphi}(i))^2 \right) \quad (6.3.20)$$

Neben den Informationskriterien wird zudem der kumulierte mittlere quadratische Fehler über alle N_{Grid} Messpunkte und N_d Datenpaare als Standardgütemaß betrachtet. Hierfür gilt [137]:

$$e_{RMSE} = \frac{1}{N_d} \frac{1}{N_{\text{Grid}}} \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_{\text{Grid}}} \sqrt{(\varphi_j[i] - \hat{\varphi}_j[i])^2} \quad (6.3.21)$$

Die Entscheidung über die beste Modellkomplexität wird sowohl anhand der Informationskriterien als auch anhand des kumulierten RMSE getroffen. Abbildung 6.15 zeigt das Ergebnis der Identifikation für zunehmende Modellkomplexität, angefangen mit einem rein linearen Systemmodell für $N_{TS} = 1$.

Erwartungsgemäß lässt sich durch Erhöhung der Modellkomplexität und somit der Anzahl linearer Teilmodelle N_{TS} die Modellgüte sowohl für den RMSE als auch für das AIC steigern. Beim BIC fließt die Modellkomplexität als Strafterm mit in die Berechnung des Gütemaßes ein, wodurch der wieder ansteigende Verlauf zu erklären ist. Das Training wurde bis zu einer Anzahl von $N_{TS} = 21$ linearen Teilmodellen durchgeführt und danach abgebrochen, da in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen keine Verbesserung mehr erzielt werden konnte. Bei der Betrachtung des Fehlersignal RMSE zeigt sich zunächst eine monoton abfallende Kurve auf dem Trainingsdatensatz. Signifikante Punkte finden sich hier bei $N_{TS} = 4$ (bei allen außer dem RMSE des Validierungsdatensatzes) und $N_{TS} = 19$. In den ersten vier Iterationen sind

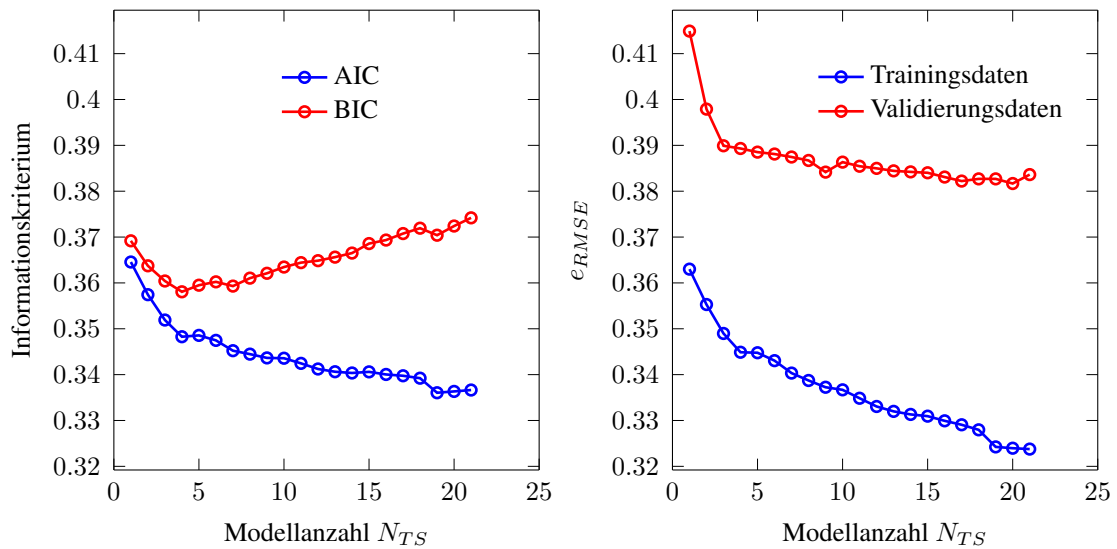


Abbildung 6.15: Bewertung der Modellkomplexität anhand von Informationskriterien und Fehlersignalen.

deutliche Verbesserungen zu erkennen. Danach flacht der Verlauf etwas ab, und macht bei $N_{TS} = 19$ einen weiteren Sprung. Auf dem Validierungsdatensatz ist ab $N_{TS} = 4$ kein signifikanter Fortschritt zu erkennen.

Ein ähnliches Verhalten zeigen die Informationskriterien. Das AIC fällt in den ersten 4 Iterationen deutlich und ebenfalls bei $N_{TS} = 19$ noch einmal. Es ist also ein Kompromiss zwischen $N_{TS} = 4$ und $N_{TS} = 19$ zu treffen. Abbildung 6.16 zeigt die Partitionen des Eingangsraums. Als Scheduling-Variablen wurden die Außenfeuchte φ_a und die relative Feuchte am betrachteten Gitterpunkt selbst φ_i verwendet, da diese im Nichtlinearitätstest als entscheidende Größen eingestuft wurden.

Da die Modellgüte bereits bei $N_{TS} = 4$ ein akzeptables Niveau erreicht hat und da das Modell zur Regelung eingesetzt werden soll, und somit die Modellkomplexität ebenfalls eine entscheidende Rolle spielt, werden im Folgenden $N_{TS} = 4$ lineare Teilmodelle verwendet, was zudem das Optimum des BIC darstellt. Da das BIC neben der Modellgüte die Modellkomplexität in Form des Strafterms direkt mit berücksichtigt, wird dieses Gütemaß im Folgenden als Grundlage der Entscheidungen über die Modellstruktur verwendet. Abbildung 6.17 zeigt die Ergebnisse der vollständigen Simulation für das identifizierte Modell und die zugehörigen Validierungsdaten.

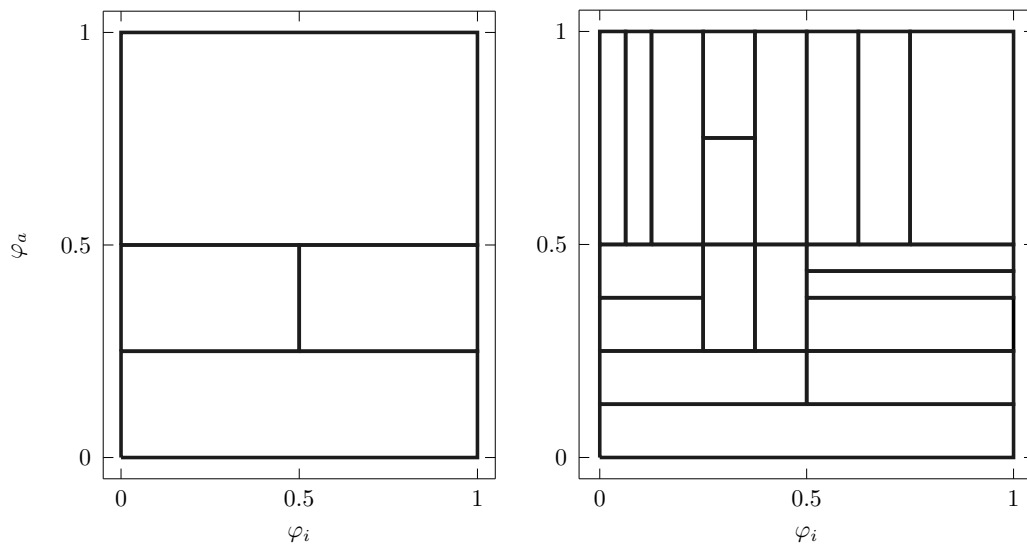


Abbildung 6.16: Schloss Fasanerie der Kulturstiftung des Hauses Hessen.

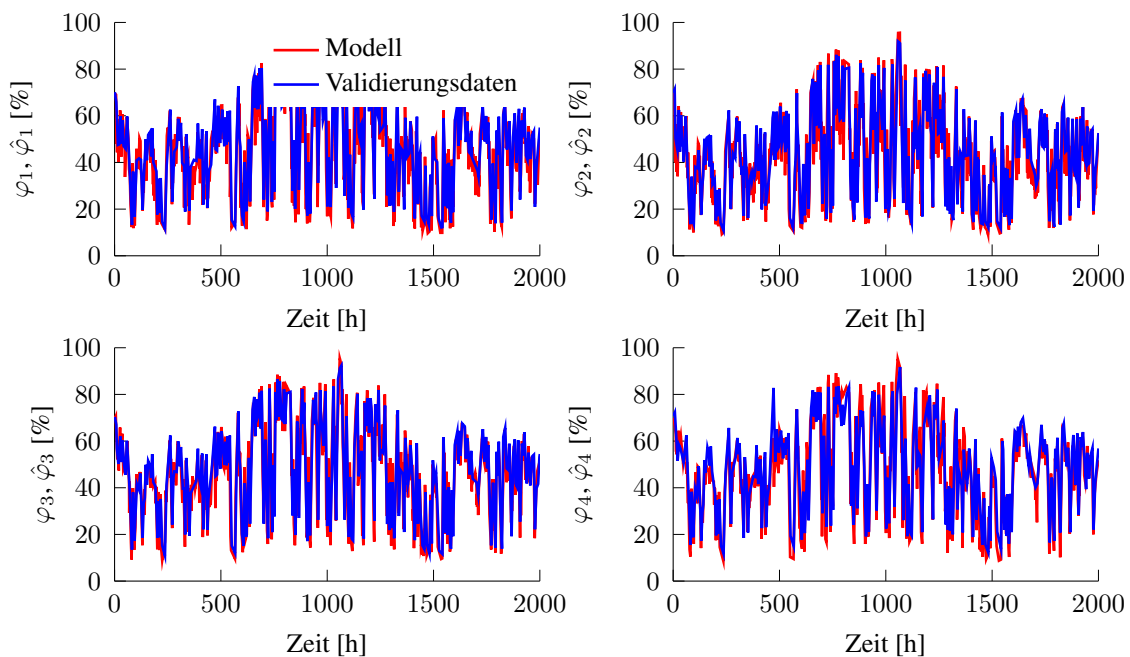


Abbildung 6.17: Ergebnisse einer vollständigen Systemsimulation für vier Messstellen.

Obwohl es sich um eine freie Simulation handelt, bildet das Modell den Prozess sehr genau ab. Sowohl die Dynamik an den einzelnen Knotenpunkten selbst kann sehr gut nachgebildet werden, als auch die örtlichen Unterschiede der vier Knotenpunkte. Verdeutlicht wird dies ebenfalls durch die Verteilung der Mess- bzw. Modelldaten aus Abbildung 6.18.

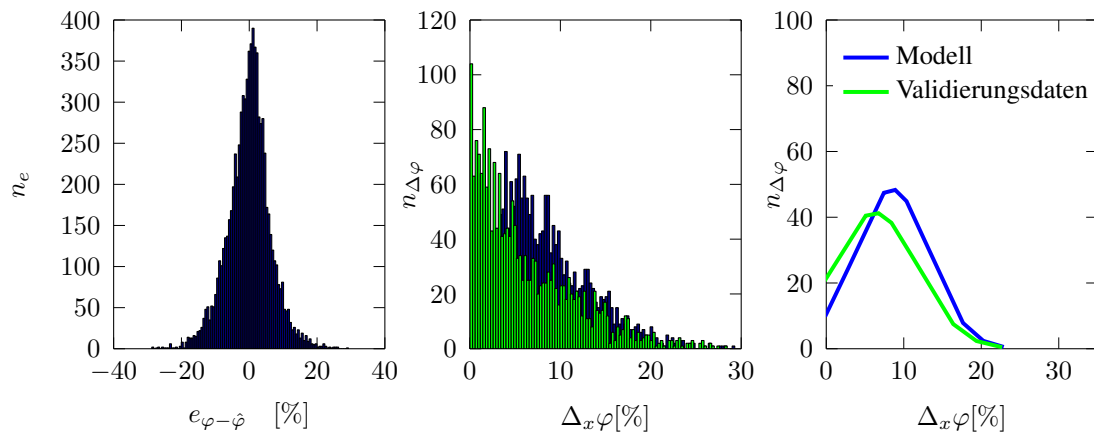


Abbildung 6.18: Links: Verteilung der Modellfehler aller Knotenpunkte. Mitte: Maximale örtliche Abweichungen pro Zeitschritt der Mess- und Modelldaten. Rechts: Abgeschätzte Verteilungsfunktion der örtlichen Abweichungen.

Im linken Bild sind die Abweichungen der Validierungsdaten φ_i von den frei simulierten Modellausgängen $\hat{\varphi}_i$ für alle Knotenpunkte $i = 1 \dots 4$ in einem Histogramm zusammengefasst. Bei der Verwendung des Least-Squares Schätzers aus Gleichung 4.4.13 wird die Normalverteilung der Fehler vorausgesetzt [138]. Die resultierenden Fehler in der linken Abbildung folgen einer Normalverteilung um null, was eine gute Modellgüte begründet. Das mittlere Bild zeigt die maximalen örtlichen Abweichungen aller Knotenpunkte pro Zeitintervall nach Gleichung (6.1.1). Die Verteilung der Werte ist dabei im Falle der Validierungsdaten und des identifizierten Modells ähnlich. Dies wird durch die abgeschätzten Verteilungsfunktionen im rechten Bild noch etwas deutlicher. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das identifizierte Modell sowohl die dynamischen Eigenschaften am Knotenpunkt selbst, als auch die örtliche Verteilung gut abbildet.

Nichtquadratische Systeme

Im vorgehenden Abschnitt wurde die Modellbildung örtlich verteilter quadratischer Systeme beschrieben und die Ergebnisse vorgestellt. Ein weiterer interessanter Anwendungsfall, der in der Praxis häufig anzutreffen ist, ist der Fall nichtquadratischer Systeme. Der Begriff „*nichtquadratische Systeme*“

wird in diesem Zusammenhang analog zu [139] für Systeme verwendet, die mehr Regelgrößen als Stellgrößen aufweisen. Bei solchen unteraktuierten Systemen lassen sich im Allgemeinen, wie in Abschnitt 4.5.2 bereits erläutert, nicht alle Regelgrößen gleichzeitig stationär genau regeln. Es lässt sich lediglich der quadratische Fehler aller Regelgrößen durch Optimierung der Führungsgrößen zu den eigentlichen Sollwerten minimieren. Dieser häufig vorkommende Praxisfall wird in Abschnitt 6.4.2 beschrieben. Für die Reglersynthese wird daher, wie bei den quadratischen Systemen zuvor, ein Prozessmodell benötigt. Im Rahmen der CFD-Simulationen des Landgrafenimmers wurden daher 20 Sensoren möglichst gleichverteilt im Raum platziert. Abbildung 6.19 zeigt die Positionierung und Nummerierung der einzelnen Sensoren, wie sie für die Berechnungen verwendet werden.

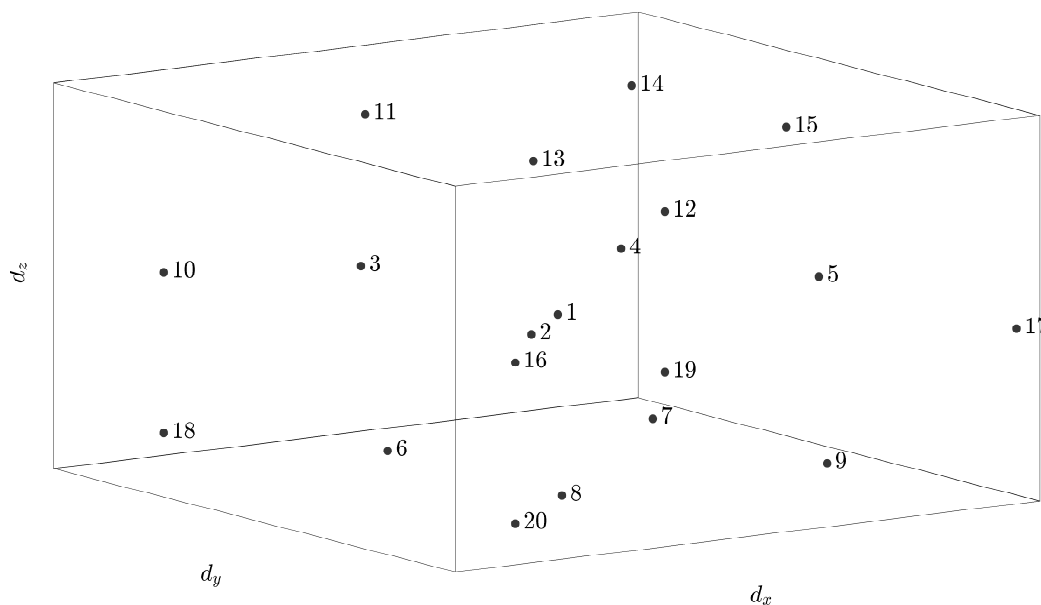


Abbildung 6.19: Verteilung und Indizierung der Messstellen.

Die Nummerierung der Sensoren erfolgt mit steigendem Abstand vom Raummittelpunkt, welcher durch den Sensor 1 gekennzeichnet ist. Da bei einer CFD Simulation mehrere zehntausend Knotenpunkte berechnet werden und somit prinzipiell zur Verfügung stehen, erfolgt die Auswahl der für die Berechnungen relevanten Sensoren mehr oder minder willkürlich einem gleich-verteilten Muster. Gerade die Anzahl notwendiger Sensoren für Mo-

modellbildung und Regelung ist dabei ein wichtiger Parameter. Zum einen hängt die Modellkomplexität stark von der Anzahl der Knotenpunkte ab, da diese die Dimensionen der Matrizen A_i , B_i und a_i der TS Fuzzy Systeme bestimmen und somit direkt die Anzahl der zu schätzenden Parameter. Zum anderen soll auch der Bezug zur realen Anwendung erhalten bleiben. Sensoren sind Investitionen und somit gilt, dass die Anzahl der Sensoren möglichst gering gehalten werden sollte. Gleichwohl erhöht die Anzahl der Messstellen natürlich die Modellgenauigkeit. Es ist somit wiederum ein Kompromiss zwischen Modellgüte und Modellkomplexität zu finden. Allerdings ist die Modellkomplexität nun von der Anzahl der linearen Teilmodelle des TS Fuzzy Systems N_{TS} und von der Anzahl der Messpunkte N_x abhängig. Es wird daher vorgeschlagen, das BIC zu verwenden, um eine Empfehlung für eine optimale Modellstruktur zu erhalten. Das BIC eignet sich deshalb gut für diese Fragestellung, weil neben der Modellgüte ein Strafterm für die Anzahl zu ermittelnder Parameter bewertet wird. Folglich gibt das BIC Aufschluss über den Einfluss verschiedener N_{TS} und N_x . Abbildung 6.20 zeigt das BIC-Gütegebirge für $N_x = 2, \dots, 20$ Sensoren und $N_{TS} = 1, \dots, 25$ lineare Teilmodelle.

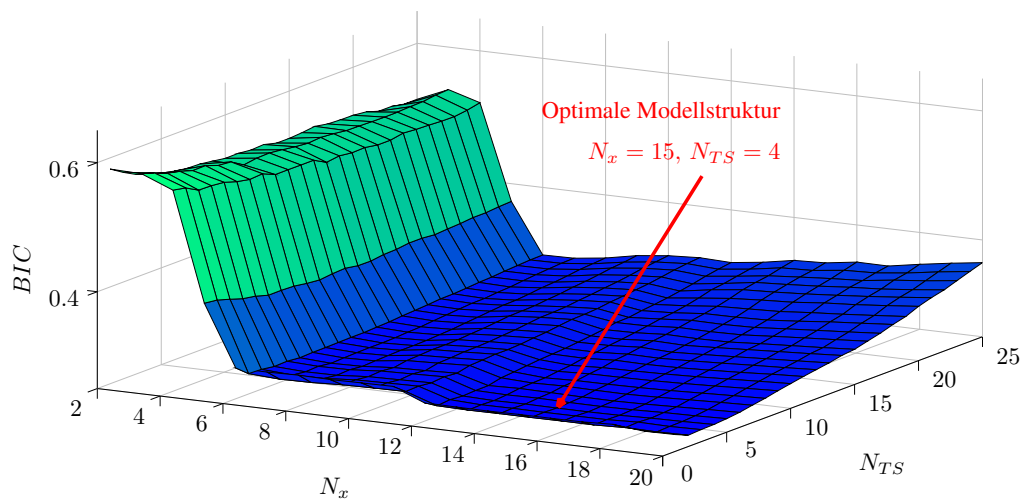


Abbildung 6.20: Auswertung des BIC nach Anzahl der Messstellen N_x und Anzahl der Teilmodelle N_{TS} .

Erwartungsgemäß sinkt das BIC zu Beginn sowohl bei der Erhöhung der Anzahl an Teilmodellen als auch bei der Erhöhung der Messstellen. Ab einer gewissen Modellkomplexität überwiegt der Strafterm, so dass das BIC wieder ansteigt. Folglich entsteht das dargestellte Gütegebirge, welches ein minimales BIC bei $N_x = 15$ und $N_{TS} = 4$ aufweist. Somit ist die Anzahl empfohlener TS Fuzzy Systeme identisch zum quadratischen Fall, was den Erwartungen entspricht, da sich die nichtlinearen Gegebenheiten nicht verändert haben. Mit Hilfe dieser Auswertung steht nun ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem die optimale Modellstruktur nichtlinearer örtlich verteilter Systeme bestimmt werden kann. Abbildung 6.21 zeigt der Vollständigkeit halber die Partitionierung des Arbeitsraums für das BIC-optimale Modell, wobei diese erwartungsgemäß der Partitionierung des quadratischen Systems entspricht.

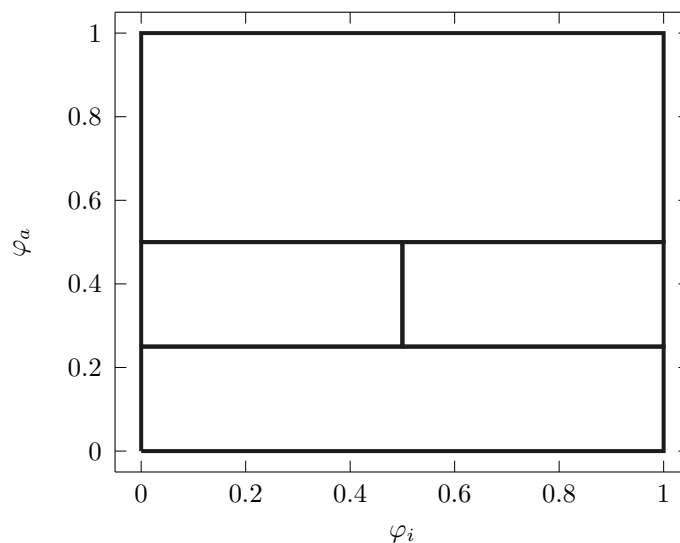


Abbildung 6.21: Partitionierung des Arbeitsraums der 15 Messstellen.

Die zugehörige freie Systemsimulation aller 15 Messstellen verglichen mit den Validierungsdaten zeigt Abbildung 6.22. Auch im Fall der nichtquadratischen Systeme lassen sich sehr gute Modelleigenschaften feststellen. Alle 15 Messstellen werden durch die komplett freie Simulation über knapp drei Monate sehr gut nachgebildet.

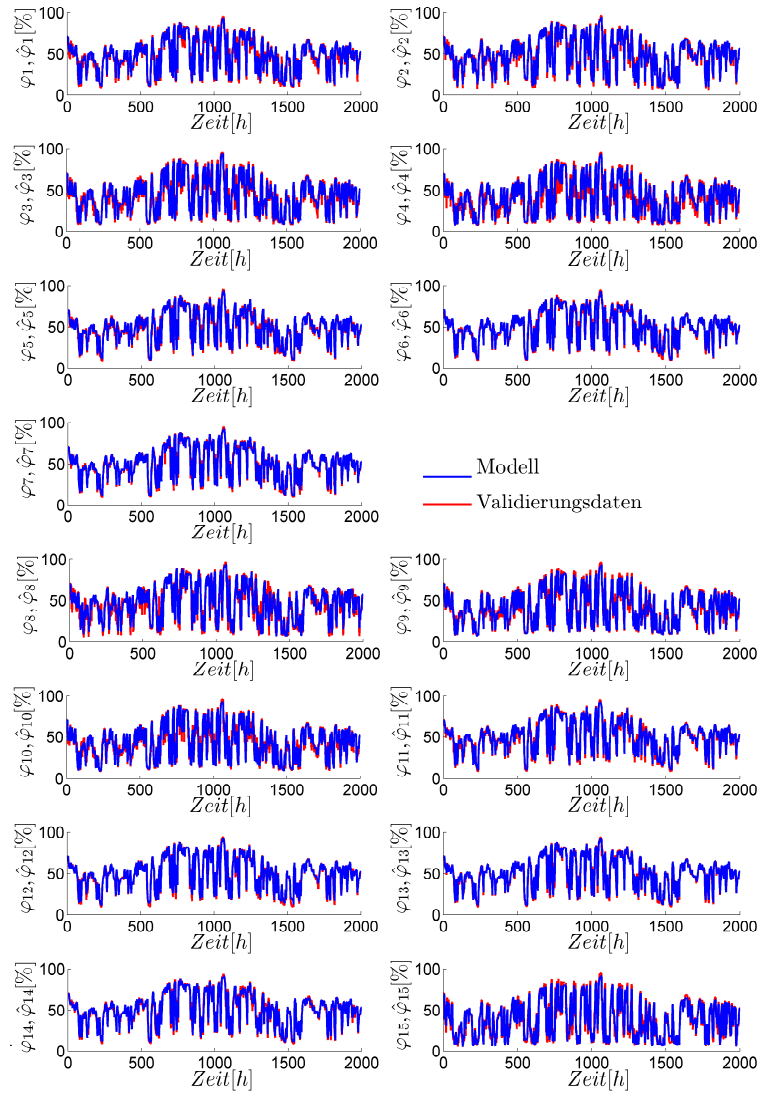


Abbildung 6.22: Ergebnisse einer vollständigen Systemsimulation für 15 Messstellen.

Für eine etwas detailliertere Betrachtung der Modelleigenschaften zeigt Abbildung 6.23 wieder die Verteilung der Modellfehler $e_{\varphi-\hat{\varphi}}$, sowie die maximalen örtlichen Abweichungen $\Delta\varphi$ für jeden Zeitschritt in Form von Histogrammen. Die Modellfehler sind auch im nichtquadratischen Fall um Null normalverteilt, bei einer Standardabweichung von $\sigma = 3,28\%$, was eine sehr gute Modellgenauigkeit bedeutet. Als Maß für die örtliche Verteilung wird wieder die maximale Differenz aller Sensoren $\Delta\varphi$ verwendet. Das mittlere Bild zeigt die Verteilung in Form eines Histogramms, das rechte Bild zeigt die abgeschätzten Verteilungsfunktionen. Beide lassen anhand

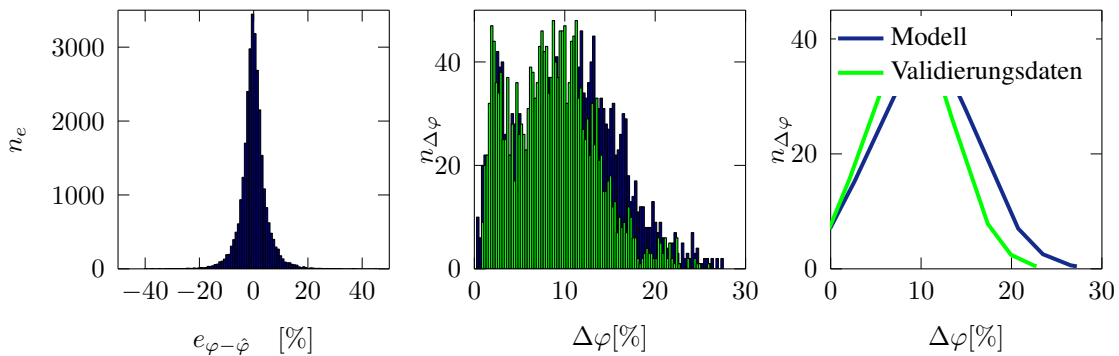


Abbildung 6.23: Links: Verteilung der Modellfehler aller Knotenpunkte. Mitte: Maximale örtliche Abweichungen pro Zeitschritt der Mess- und Modelldaten. Rechts: Abgeschätzte Verteilungsfunktion der örtlichen Abweichungen für 15 Messstellen.

des Vergleichs von Modell- und Validierungsdaten eine ähnliche Verteilung vermuten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass eine hohe Modellgenauigkeit sowohl im dynamischen Verhalten der einzelnen Messstellen, als auch in der örtlichen Verteilung vorliegt. Anhand des BIC konnte die optimale Modellstruktur als Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und Modellkomplexität ermittelt werden. Gerade für die praktische Anwendung kann dies als nützliches Werkzeug zur Abschätzung notwendiger Sensoren dienen. Die identifizierten Modelle, sowohl für den quadratischen, als auch für den nichtquadratischen Fall werden im Folgenden zur Reglersynthese verwendet.

6.4 Reglersynthese und Ergebnisse

Im Folgenden Abschnitt werden die zuvor identifizierten Modelle zur Reglersynthese verwendet und die Ergebnisse dargestellt. Dabei wird ein örtlich verteilter PDC (VP-PDC) auf Basis der vorgestellten Theorie in Abschnitt 4.5 sowohl für quadratische als auch für nichtquadratische Systeme entworfen und angewendet. Als Vergleich der Ergebnisse wird, in Anlehnung an den Stand der Technik, für jeden Aktor ein separater PI-Regler verwendet. Dies entspricht in etwa den heute verfügbaren mobilen Be- und Entfeuchtungsgeräten. Die PI-Regler wurden anhand von experimentell aufgenommenen

Sprungantworten nach heuristischen Einstellregeln parametrisiert (hier: Einstellregeln nach Ziegler und Nichols)[9]. Als Simulationsszenario wurde ein Außenwetterszenario verwendet, welches in der Ansys Workbench als Datensatz hinterlegt ist. Des Weiteren sind Störungen durch Fensteröffnungen während der Simulation eingefügt worden. Für alle Simulationen gilt dabei das gleiche Szenario. Der Sollwert beträgt $w = 50\%$ relative Luftfeuchte an allen Knotenpunkten im Raum.

6.4.1 Quadratische Systeme

Für den einfacheren Fall der quadratischen Systeme lässt sich die Reglerstruktur nach Abbildung 4.35 mit dem Regelgesetz 4.5.25 verwenden, wobei x_w und u_w nach Gleichung 4.5.21 berechnet werden.

Für die Reglersynthese können die LMIs für diskrete TS Fuzzy Systeme verwendet werden. Im vorliegenden Fall wurde die LMI_D 4 verwendet um die Stellgröße beschränken zu können. Die Stellgröße ist dabei im übertragenen Sinne die Lüfterleistung, wie es in den realen Geräten ebenfalls der Fall ist. In der CFD Simulation lässt sich allerdings nur die Geschwindigkeit der ausströmenden Luft aus Be- beziehungsweise Entfeuchter direkt angeben, welche aber in direktem Zusammenhang mit der Lüfterleistung steht. Anhand des Datenblatts lässt sich eine Stellgrößenbeschränkung der vier Aktoren von $u_{\max} = 0,06 \frac{m}{s}$ festlegen. Der Parameter für die Abklingrate wird auf $\kappa = 0,9$ gesetzt. Die Ergebnisse der Regelung mit vier Aktoren auf vier Knotenpunkte zeigt Abbildung 6.24.

Das obere Bild zeigt einen Ausschnitt von ca. drei Monaten, wobei deutlich zu erkennen ist, dass die Klimawerte um den Sollwert von $w = 50\%$ stabilisiert werden konnten. Die Boxplots in der Mitte zeigen die Verteilung aller Messwerte für den unregelmäßigen Fall (links) und den geregelten Fall (rechts). Es ist eine signifikante Eingrenzung der Klimawerte um den Sollwert erkennbar. Im unteren Bild ist aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich die Stellgröße an einem Akteurstandort dargestellt. Es zeigt sich, dass die Stellgrößenbegrenzung zu keiner Zeit verletzt wird. Des weiteren fällt auf,

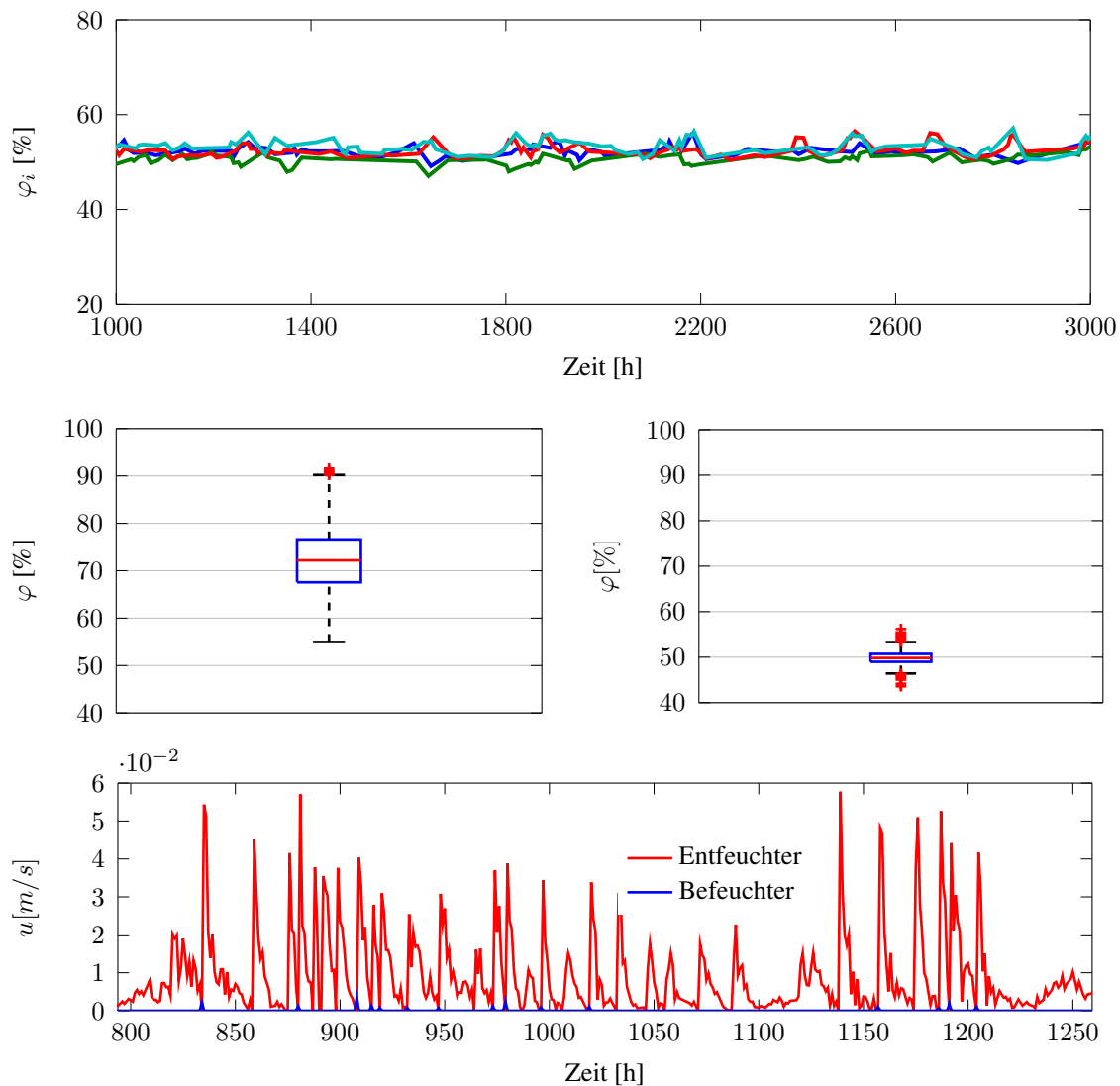


Abbildung 6.24: Oben: Auszug des geregelten Systems. Mitte: Verteilung der Messwerte des unregulierten Systems (links) und des geregelten Systems (rechts). Unten: Auszug aus dem Verlauf der Stellgrößen an einem Akkorstandort

dass fast ausschließlich der Entfeuchter betrieben wird, was allerdings den Erwartungen aufgrund der Messungen des unregulierten Systems entspricht. Abschließend sollen die Ergebnisse mit dem Stand der Technik verglichen werden. Wie bereits zuvor erwähnt, werden momentan verfügbare mobile Be- und Entfeuchtungsgeräte meist durch Messungen an einem Referenzort betrieben. Jedes der einzelnen Geräte, in diesem Fall die vier Standorte aus Abbildung 6.13, funktioniert autark ohne Informationen über die anderen

Sensoren oder Aktoren. Die Folge ist, dass es zu unerwünschtem Verhalten durch gegenseitige Beeinflussung kommt. Für die folgende Untersuchung wird jedem Endgerät der örtlich nächste Sensorknoten zugeordnet. Die heuristisch parametrisierten PI-Regler erhalten lediglich die Information über die Regelabweichung zwischen dem zugeordneten Sensorknoten und dem Sollwert $w = 50\%$. Abbildung 6.25 zeigt die Ergebnisse im Vergleich mit dem VP-PDC. Die obige Abbildung zeigt einen Auszug des örtlich kumulierten Regelfehlers nach:

$$e_{cum}[k] = \frac{1}{N_{Grid}} \sum_{i=1}^{N_{Grid}} \sqrt{(w[k] - \varphi_i[k])^2} \quad (6.4.1)$$

für den VP-PDC und das PI geregelte System.

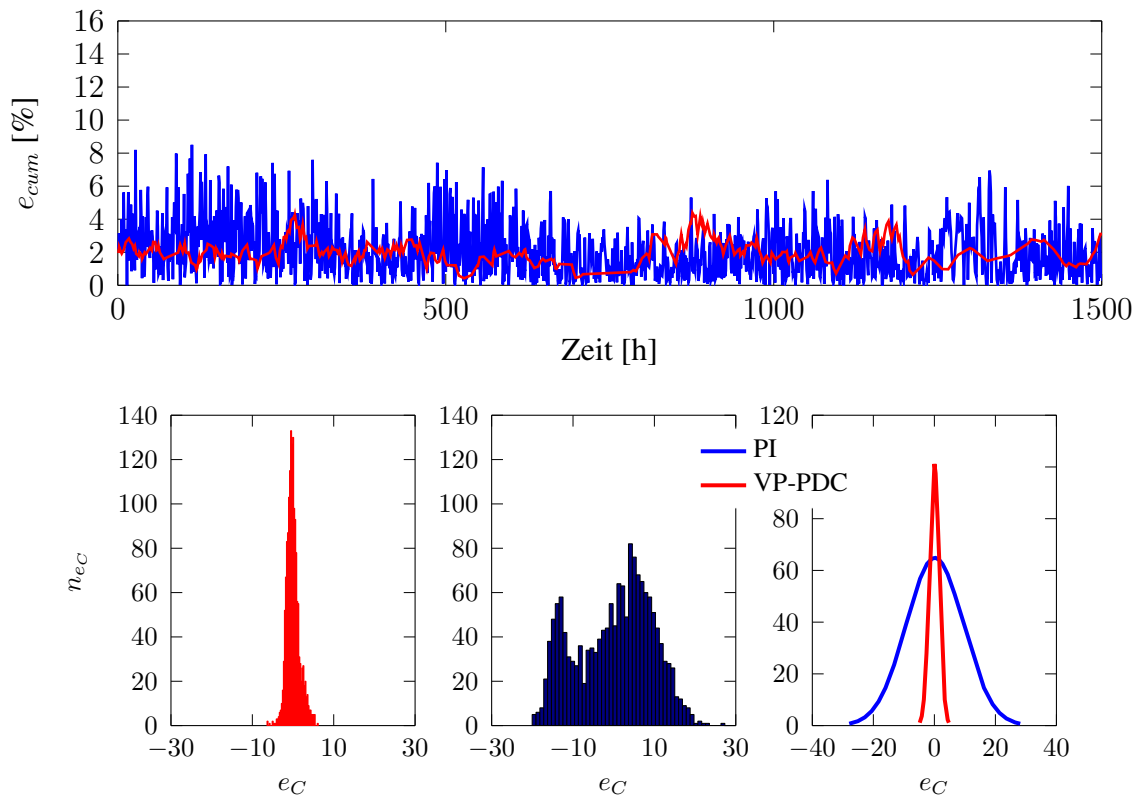


Abbildung 6.25: Oben: Auszug des kumulierten RMSE zwischen Soll- und Istwert. Unten: Histogramme der Verteilungen der Regelfehler für den VP-PDC und PI geregelten Aktoren.

Bereits hier ist deutlich ersichtlich, dass das PI geregelte System deutlich größere Fluktuationen aufweist, was durch gegenseitige Beeinflussungen der Aktoren zustande kommt. Die unteren Bilder zeigen die Verteilung der Regelfehler als Differenz aus Soll- und Istwert. Die VP-PDC geregelten Messwerte bilden ein deutlich kompakteres Band um den Sollwert, als dies durch den PI Regler möglich ist. Das untere rechte Bild zeigt eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für beide Fälle. Beide Systeme haben im Mittel den Sollwert erreicht, wobei dieser durch den VP-PDC besser gehalten werden kann.

6.4.2 Nichtquadratische Systeme

In praktischen Anwendungen der Raumklimaregelung wird der Fall nichtquadratischer Systeme weitaus häufiger vorkommen, da mehr Sensoren als Aktoren zur Verfügung stehen. Daher wird im Folgenden Abschnitt noch auf die Regelung nichtquadratischer Systeme eingegangen. Die Modellbildung wurde bereits im Abschnitt 6.3 beschrieben. Für die Regelung ergibt sich im Falle der nichtquadratischen Systeme das Problem, dass nicht alle Knotenpunkte auf den gewünschten Sollwert geregelt werden können. Dies ist bei unteraktuierten Systemen im Allgemeinen immer der Fall (siehe Abschnitt 4.5.2). Daher wurde in Abschnitt 4.5.2 ein Verfahren vorgeschlagen, welches eine realisierbare Sollwerttrajektorie \mathbf{x}_w berechnet, indem der mittlere quadratische Fehler vom gewünschten Sollwert w über alle Sensoren minimiert wird. Es resultiert die Berechnungsvorschrift der realisierbaren Sollwerttrajektorie \mathbf{x}_w aus Gleichung (4.5.24), die im Rahmen der Regelung in jedem Berechnungsschritt gelöst werden muss. Als Sollwert gilt für alle Knotenpunkte wie im vorherigen Fall $w = 50\%$ relative Luftfeuchte. Abbildung 6.26 zeigt die Ergebnisse der Regelung des PDC mit Sollwertfolge. Die Reglersynthese erfolgte ebenfalls über die LMI_D 4 mit einer Stellgrößenbegrenzung von $u_{max} = 0,06[m/s]$.

Der Verlauf der berechneten Sollwerttrajektorien \mathbf{x}_w ist in rot dargestellt. Für den Fall linearer Systeme ist \mathbf{x}_w konstant, sofern der Sollwert w konstant

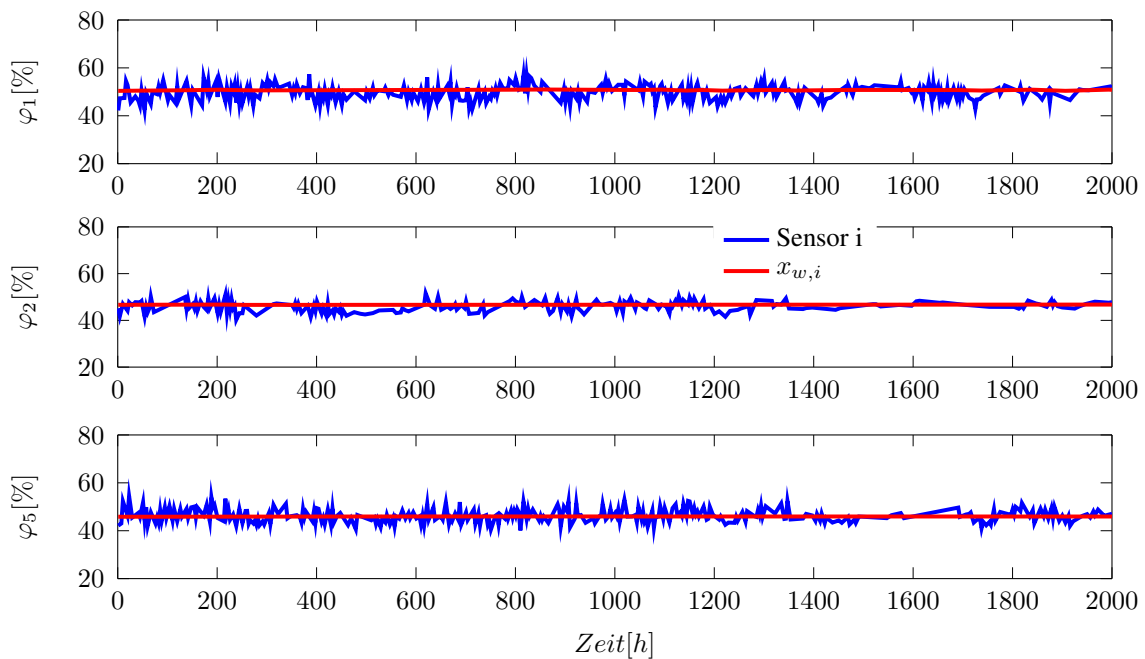


Abbildung 6.26: Auszug der Regelungsergebnisse für drei Beispielsensoren.

ist. Für die TS Fuzzy Systeme ist dies nicht der Fall, da für jedes lineare Teilmodell eine separate realisierbare Ruhelage berechnet wird, welche über die Zugehörigkeitsfunktionen aggregiert werden. Daher entsteht hierbei kein konstanter Verlauf sondern tatsächlich eine Trajektorie. Da sich die Werte aber bei funktionierender Regelung um die berechnete Trajektorie und somit um den gewünschten Sollwert bewegen, ändern sich auch die Zugehörigkeitswerte nicht gravierend, sodass die berechnete Sollwerttrajektorie keine signifikanten Variationen zeigt.

Die Ergebnisse in Abbildung 6.26 zeigen wieder einen Auszug von 2000 Stunden und beispielhaft drei der verfügbaren Sensoren aus Abschnitt 6.3. Es ist deutlich erkennbar, dass die Regelung der berechneten Sollwerttrajektorie folgt, wenngleich diese nicht dem exakten gewünschten Wert von $w = 50\%$ entspricht. Da es sich bei den nichtquadratischen Systemen um ein Kompromiss aus positiven und negativen Regelabweichungen handelt, die sich in Summe möglichst aufheben sollen, ist der Verlauf aus Abbildung 6.26 durchaus erwünscht. Zudem zeigt Abbildung 6.27 die Messwertverteilung

der Regelfehler, diesmal über alle Sensoren. Hierbei wird die Verteilung der Abweichungen vom gewünschten Sollwert $w = 50\%$ und die Abweichung jedes Sensors von der zugehörigen Sollwerttrajektorie $x_{w,i}$ ausgewertet.

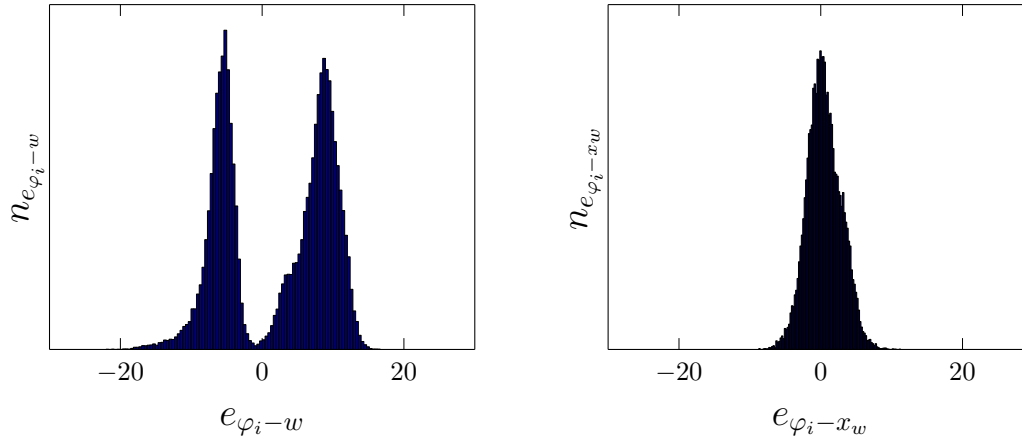


Abbildung 6.27: Verteilung der Regelfehler für den Sollwert $w(\text{links})$, sowie die erreichbaren statischen Zustände x_w .

Das linke Bild in Abbildung 6.27 zeigt die Verteilung der Regelfehler zum gewünschten Sollwert. Zunächst lässt sich vermuten, dass das Regelungsergebnis nicht zufriedenstellend ist. Unter der Prämisse, dass nicht alle Sensoren auf den gewünschten Wert geregelt werden können, und somit ein Kompromiss gefunden werden muss, ist das Ergebnis allerdings als gut zu bewerten. Es ist deutlich ersichtlich, dass sich zwei Verteilungen um den Regelfehler $e_{\varphi_i-w} = 0$ bilden, die in etwa gleich geformt sind. Demzufolge wurde eine Kompromisslösung aus Werten, die oberhalb des Sollwerts und Werten, die unterhalb des Sollwerts liegen realisiert. Der Mittelwert aller Sensoren über die komplette Simulationsdauer liegt bei $\bar{\varphi} = 50,95\%$, was ebenfalls dafür spricht, dass die Optimierung der realisierbaren Sollwerttrajektorie zu einer sehr guten Kompromisslösung führt. Die rechte Messwertverteilung aus Abbildung 6.27 zeigt zusätzlich die Verteilung der Abweichungen der Sensoren zur jeweiligen berechneten Sollwerttrajektorie $e_{\varphi_i-x_{w,i}}$ zusammengefasst in einem Histogramm für alle Knotenpunkte. Diese Verteilung gibt Aufschluss über die eigentliche Qualität der unterlagerten Regelung ohne die Verschiebung der Sollwerte zu berücksichtigen.

Hier zeigt sich, wie bereits am Beispiel der quadratischen Systeme, dass die Regelfehler normalverteilt um einen Mittelwert von $\bar{e}_{\varphi_i - x_{w,i}} = 0,15\%$ liegen, mit einer Standardabweichung von $\sigma_{e_{\varphi_i - x_{w,i}}} = 1,4\%$. Da es sich bei der Raumklimaregelung um einen hochgradig gestörten Prozess (z.B. durch Außenwetter, Besucher, etc.) handelt, ist dieses Ergebnis als sehr gut zu bewerten. Abschließend zeigt Abbildung 6.28 noch beispielhaft einen Auszug des Stellsignals für einen der beiden Aktoren. Auch hier wird die Stellgrößenbegrenzung der Reglersynthese nicht verletzt. Der Befeuchter kommt selten zum Einsatz, da die Grundfeuchte, wie bereits zuvor erwähnt dauerhaft über dem Sollwert liegt.

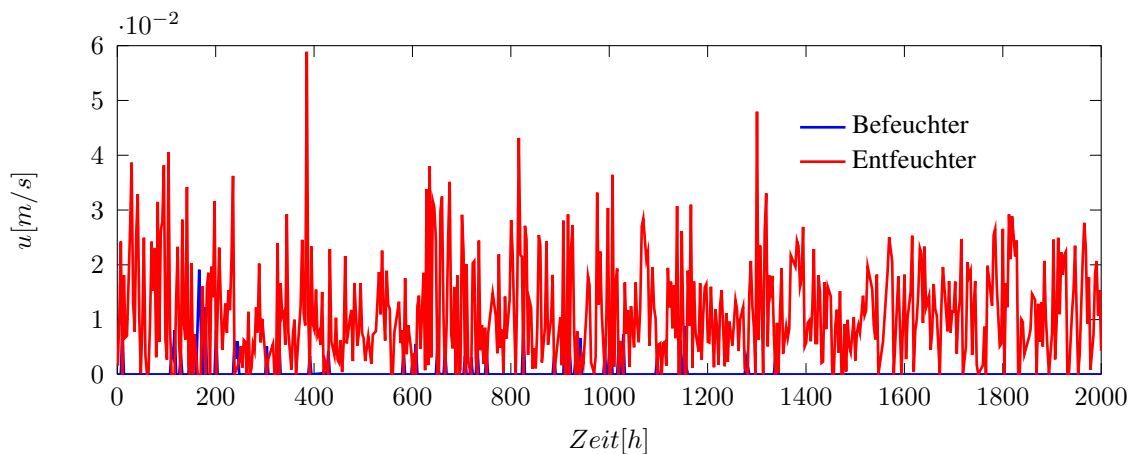


Abbildung 6.28: Auszug eines Stellsignals der Regelung nichtquadratischer Systeme.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Nahezu alle technischen Systeme weisen eine örtliche Verteilung ihrer Parameter oder Variablen auf. Häufig ist eine vereinfachende Betrachtung des Systems als konzentriert-parametrisches System möglich und sinnvoll, sofern keine Anforderung an die Modellgenauigkeit und den Detaillierungsgrad verletzt werden. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellierung und Regelung des Raumklimas, und hier im Speziellen mit der relativen Luftfeuchte. Auch bei der Betrachtung des Systems „*Raumklima*“ gilt es abzuwägen, ob für die Klimagrößen eine örtliche Verteilung berücksichtigt werden sollte oder nicht. In den meisten, bis heute bekannten Arbeiten, wird zumindest für die Regelung die konzentriert parametrische Theorie angewandt, was bei nicht zu restriktiven Anforderungen an das Raumklima, als ausreichend betrachtet werden kann. Diese Arbeit fokussiert allerdings das Themenfeld der Präventiven Konservierung, dass heißt, der vorbeugenden Maßnahmen zum Schutz von Kulturgütern. In diesem Fall sind die Anforderungen weitaus strenger anzusehen. Durchgeführte Messungen in historischen Gebäuden haben dabei eine deutliche örtliche Verteilung der Klimagrößen bestätigt, weshalb sich diese Arbeit mit der Optimierung der Modellbildung und der Regelung des Raumklimaverhaltens befasst.

Zur Betrachtung örtlich verteilter Probleme werden häufig CFD-Simulationen eingesetzt. Sie sind allgemein anerkannt und liefern sehr detailreiche Ergebnisse. Allerdings ist der rechentechnische Aufwand zur Gewinnung solch detailreicher Ergebnisse extrem hoch. Des Weiteren ist die Parametrierung und Durchführung solcher Simulationen sehr komplex, was viele Anwender vor eine große Herausforderung stellt. Aus den genannten

Gründen sind CFD-Simulationen zur Reglersynthese ungeeignet. An dieser Stelle setzt die vorliegende Arbeit an. Die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge der betrachteten örtlich verteilten Systeme sind generelle Strömungsprobleme. Beschrieben werden solche Probleme durch dynamische nichtlineare partielle Differentialgleichungssysteme. Ein bekanntes Beispiel sind die Navier-Stokes Gleichungen der Impulserhaltung. CFD-Simulationen setzen zur Lösung der Gleichungssysteme auf numerische und iterative Verfahren, was den hohen rechentechnischen Aufwand begründet. Zur Vereinfachung des Problems werden hierzu in der vorliegenden Arbeit die Finiten-Differenzen Methoden als örtliches Diskretisierungsverfahren verwendet, wodurch das partielle Differentialgleichungssystem in ein ordinäres Gleichungssystem überführt werden kann.

Zur Behandlung nichtlinearer Zusammenhänge in den zugrundeliegenden Prozessen wird die Theorie der TS Fuzzy Systeme auf örtlich verteilte Systeme erweitert. Durch die Einführung des Hadamard-Produktes bei der Akkumulation der linearen Teilmodelle kann die Anzahl der linearen Teilmodelle signifikant reduziert werden, was den Einsatz der TS Fuzzy Systeme überhaupt erst praktikabel nutzbar macht.

Da die Modellparameter in realen Applikationen nicht bekannt und auch nur schwer bis unmöglich analytisch zu ermitteln sind, wird zudem ein Verfahren zur datengetriebenen Modellbildung aufgezeigt. Basierend auf dem bekannten LOLIMOT-Algorithmus wird die Systemidentifikation auf örtlich verteilte Systeme erweitert.

Die Anwendung der eingeführten Methoden zur Modellbildung, Regelung und Systemidentifikation wird am Beispiel des Raumklimas demonstriert. Dabei kann gezeigt werden, dass die örtlich verteilte Betrachtungsweise eine deutliche Verbesserung der Reglerperformance gegenüber der konzentriert parametrischen aufweist. Durch die Optimierung von Sollwerttrajektorien lassen sich zudem nichtquadratische und unteraktuierte Systeme regeln. Da der Fall der unteraktuierten Systeme im Bereich der Raumklimaregelung den Standard darstellt, sind diese Ergebnisse besonders wichtig. Mit dem

vorgestellten Ansatz können hierzu gute Ergebnisse erzielt werden. Des Weiteren zeigt sich bei der Modellbildung eine deutlich höhere Modellgenauigkeit durch die Verwendung der nichtlinearen Systemtheorie. Mit Hilfe von Informationskriterien wie dem AIC oder dem BIC kann zudem eine Empfehlung zur optimalen Modellkomplexität bezüglich der notwendigen Anzahl an linearen Teilmodellen sowie der notwendigen Anzahl an Sensoren gegeben werden. Gerade letzteres stellt den Bezug zur realen Anwendung her, bei der sich immer die Frage nach der Anzahl notwendiger Sensoren stellen wird. Durch das aufgezeigte Informationskriterium kann hier eine Empfehlung über die optimale Modellstruktur und somit auch die optimale Anzahl an Sensoren gegeben werden.

Ein offenes Problem stellt bislang die praktische Erprobung des vorgestellten Ansatzes dar. Eine Voraussetzung zur Verbesserung der Reglerperformance ist die Existenz eines wertkontinuierlichen Stellsignals. In den gezeigten Ergebnissen wurde dieses als gegeben vorausgesetzt und die erwünschte Wirkungsweise des vorgestellten Ansatzes erzielt. In der Tat ist es in aktuell verfügbaren Geräten so, dass diese sich lediglich in groben Stufen steuern lassen. Der Umbau der Geräte ist Thema aktueller Arbeiten. Hierbei soll das Prinzip der Be- und Entfeuchtung mit Kompressortechnik durch ein peltierbasiertes Konzept ersetzt werden. Der Vorteil von Peltierelementen ist, dass sie kontinuierlich über den zugeführten Strom regelbar sind.

Ein weiteres offenes Themenfeld betrifft die datengetriebene Modellbildung. Bislang wird ein LOLIMOT ähnlicher Algorithmus verwendet, der den Arbeitsraum in jeder Iteration orthogonal nach einer Dimension in lediglich zwei gleich große Gebiete teilt. Für konzentriert parametrische Systeme wurde bereits gezeigt, dass eine achsenschräge Aufteilung in einigen Fällen bessere Ergebnisse liefert oder die notwendige Modellanzahl verringert. Ob diese Änderung nennenswerte Verbesserungen im hier betrachteten Fall bringt, bleibt zu untersuchen und kann an dieser Stelle nur schwer abgeschätzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Bernard. *Ein Beitrag zur gewichteten multikriteriellen Optimierung von Heizungs-und Lüftungsregelkreisen auf Grundlage des Fuzzy Decision Making*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2000.
- [2] H. Rietschel; H. Esdorn. *Raumklimatechnik: Grundlagen*. Springer-Verlag Berlin, 2008.
- [3] H. Reichwald. *Klimabedingte Schäden an Raum und Ausstattung. Fallbeispiele aus Baden-Württemberg*. ICOMOS-Hefte des Deutschen Nationalkomitees 42, S.49-60, 2015.
- [4] U. Hähner. *Zerrissen-zernagt-zerfallen: Bestandsschäden in Bibliotheken; hessische Bibliotheken suchen Buchpaten; eine Ausstellung der wissenschaftlichen Bibliotheken anlässlich des Hessischen Bibliothekstages Friedberg*. 2005.
- [5] M. Mecklenburg. *Determining the Acceptable Ranges of Relative Humidity And Temperature in Museums and Galleries: Part 1, Structural Response to Relative Humidity*. Smithsonian Museum Conservation Institute, Washington, USA, 2007.
- [6] F. Haghighat; Y. Li; A. Megri. *Development and validation of a zonal model - POMA*. Elsevier, Nr. 9, Volume 36, S. 1039-1047, 2001.
- [7] C. Inard; H. Bouia; P. Dalicieux. *Prediction of air temperature distribution in buildings with a zonal model*. Elsevier, Energy and buildings 24, Nr. 2, S.125-132, 1996.

- [8] C. Inard; B. Buty. *Simulation of thermal coupling between a radiator and a room with zonal models*. Proceeding of 12th AIVC Conference, Ottawa, Kanada, 1991.
- [9] J. Lunze. *Automatisierungstechnik: Methoden für die Überwachung und Steuerung kontinuierlicher und ereignisdiskreter Systeme; mit 74 Anwendungsbeispielen und 84 Übungsaufgaben*. Oldenbourg Verlag, München, 2003.
- [10] E. Richter; H. Fischer; R. Jenisch; H. Freymuth; M. Stohrer P. Häupl; M. Homann. *Lehrbuch der Bauphysik: Schall-Wärme-Feuchte-Licht-Brand-Klima*. Springer-Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [11] J. Roloff. *Bauklimatik für Architekten Grundlagen der Bauklimatik*. Skript zur Vorlesung, TU Dresden.
- [12] G. Hausladen. *Einführung in die Bauklimatik: Klima-und Energiekonzepte für Gebäude*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 2001.
- [13] V. Huckemann; R. Kilian; L. Klemm; M. Rösler; H. Werdin; M. Hoppe. *Museen nachhaltig sanieren - Kunstwerke schützen, Denkmäler erhalten, Energieeffizienz erreichen*. BINE Informationsdienst, Bonn, 2014.
- [14] M. Kotterer; H. Großschmidt; F. Boody. *Klima in Museen und historischen Gebäuden - Vom konservatorisch richtigen Heizen und Lüften*. VDR Beiträge zur Erhaltung von Kunst und Kulturgut, Verlag Schnell + Steiner, Regensburg, 2008.
- [15] M. Wohlleben; G. Mörsch. *Georg Dehio und Alois Riegl – Konservieren, nicht restaurieren.: Streitschriften zur Denkmalpflege um 1900*. Bauwelt Fundamente, De Gruyter, Berlin, 1988.
- [16] C. Gamble. *John Ruskin, Eugène Viollet-le-Duc and the Alps*. Alpin Journal 104, S. 185-196, 1999.

- [17] A. Burmester. *Was ist präventive Konservierung? Eine Einführung.* Grundlagen der Messtechnik in der präventiven Konservierung, Krah & Grote, S. 8-11, 2007.
- [18] M. Koller. *Zur Geschichte der vorbeugenden Konservierung.*
- [19] U. Besch. *Restauratorentaschenbuch: Das Grundsatzpapier von Vantaa - Zur Situation der präventiven Konservierung in Europa.* S. 76-80, München, 2002.
- [20] A. Burmester. *Raumklima in Museen und historischen Gebäuden: Kongressband.* Fachinstitut Gebäude-Klima e.V., 2000.
- [21] J. Huber; K. Lerber. *Handhabung und Lagerung von mobilem Kulturgut: ein Handbuch für Museen, kirchliche Institutionen, Sammler und Archive.* Transcript Verlag, Bielefeld, 2003.
- [22] H. Plenderleith; P. Philippot. *Climatology and conservation in museums.* Museum, Vol. 13, 1960.
- [23] R. Hofmann. *Bestandserhaltung in Archiven und Bibliotheken.* DIN Deutsches Institut für Normung, 2009.
- [24] D. Erhardt; M. Mecklenburg. *Relative humidity re-examined.* Studies in Conservation Vol. 39, S. 32-38, 1994.
- [25] ASHRAE. *Handbook HVAC Fundamentals.* American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers, Vol. 111, Atlanta, USA.
- [26] H. Garrecht. *Raumklimaoptimierung im Spannungsfeld von Denkmalpflege und Nutzung unter energetischen Aspekten, dargestellt an Praxisbeispielen.* Altbausanierung 3: Bauphysik und Bausanierung 19. Hanseatische Sanierungstage, Heringsdorf/Usedom, Beuth Verlag, 2008.

- [27] R. Kilian; M. Krus; K. Sedlbauer. *Klimaanforderungen für Kunstwerke und Ausstattung historischer Gebäude*. Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, 2005.
- [28] BRUNE Luftbefeuchtung GmbH. *Bedienungsanleitung DEHUMID HP50*. <http://www.brune.info/media/pdf/bedienungsanleitung-dehumid-hp-50.pdf>, abgerufen am 25.11.2015.
- [29] A. Trogisch. *Was versteht man unter Klimatechnik bzw. Klimatisieren ?* KI Kälte Luft Klimatechnik 1, S. 23-27, 2010.
- [30] C. Arnold. *Entwicklung fuzzybasierter Leitkomponenten für das Klimamanagement in der präventiven Konservierung*. Springer-Verlag, Wiesbaden, 2013.
- [31] M. Glauert. *Klimaregulierung in Bibliotheksmagazinen*. Bibliotheken bauen und ausstatten, S. 158-173, Bock + Herchen Verlag, Bad Honeff, 2009.
- [32] N. Fouad. *Bauphysik Kalender - Gebäudediagnostik*. Ernst & Sohn, Berlin, 2012.
- [33] G. Hilbert; B. Fischer. *Sammlungsgut in Sicherheit: Beleuchtung und Lichtschutz, Klimatisierung, Schadstoffprävention, Schädlingsbekämpfung, Sicherungstechnik, Brandschutz, Gefahrenmanagement, Berliner (Schriften zur Museumskunde 1)*. Institut für Museumskunde, Berlin, 2002.
- [34] U. Wickström. *TASEF-2: A Computer Program for Temperature Analysis of Structures Exposed to Fire*. Report, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1979.

- [35] Deutsches Institut für Normung e.V. (DIN). *Wärmeschutz und Energie-Einsparung in Gebäuden - Teil 3: Klimabedingter Feuchteschutz; Anforderungen, Berechnungsverfahren und hinweise für Planung und Ausführung*. Norm DIN 4108-3, Beuth-Verlag, Berlin, 2001.
- [36] A. Weinmann. *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*. Band 2, Springer-Verlag, Wien, Österreich, 2013.
- [37] D. Franke. *Systeme mit örtlich verteilten Parametern: eine Einführung in die Modellbildung, Analyse und Regelung*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [38] K. Küpfmüller. *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [39] X. Peng; A. Van Paassen. *A state space model for predicting and controlling the temperature responses of indoor air zones*. Elsevier, Energy and Buildings 28, Nr. 2, S- 197-203, 1998.
- [40] A. Iwamae. *A study on humidity distribution in a room*. Momentum 6, Nr. 7, S. 8, 2007.
- [41] P. Jones; G. Whittle. *Computational fluid dynamics for building air flow prediction - current status and capabilities*. Elsevier, Building and Environment 27, Nr. 3, S.321-338, 1992.
- [42] S. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press, Boca Raton, USA, 1980.
- [43] X. Peng. *Modeling of indoor thermal conditions for comfort control in buildings*. PhD thesis, Technical University Delft, Niederlande, 1996.
- [44] F. White; I. Corfield. *Viscous fluid flow*. Band 3, McGraw-Hill, New York, USA, 2006.

- [45] Q. Meng; G. Yanling; Y. Xiuying. *CFD-based system identification method for controlled system involved of fluid flow and heat/mass transfer*.
- [46] T. Desta; K. Janssens; A. Van Brecht; J. Meyers; M. Baelmans; D. Berckmans. *CFD for model-based controller development*. Elsevier, Building and Environment 39, Nr. 6, S. 621-633, 2004.
- [47] Q. Meng; Y. Wang; X. Yan; Z. Li. *CFD assisted modeling for control system design: A case study*. Elsevier, Simulation Modelling Practice and Theory 17, Nr. 4, S. 730-742, 2009.
- [48] R. Schwarze. *CFD-Modellierung: Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [49] W. Baumann; U. Bunge; O. Frederich; M. Schatz; F. Thiele. *Finite-Volumen-Methode in der Numerischen Thermofluidodynamik*. Skript zur Vorlesung, Technische Universität Berlin, 1999.
- [50] D. Marsal. *Finite Differenzen und Elemente: Numerische Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [51] A. Stanoyevitch. *Introduction to numerical ordinary and partial differential equations using MATLAB*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 2011.
- [52] J. Huber; K. von Lerber. *Handhabung und Lagerung von mobilem Kulturgut: ein Handbuch für Museen, kirchliche Institutionen, Sammler und Archive*. transcript Verlag, Bielefeld, 2015.
- [53] K. Lengsfeld; A. Holm. *Entwicklung und Validierung einer hygrothermischen Raumklima-Simulationssoftware WUFI®-Plus*. Wiley Online Library.

- [54] H. Künzeli; K. Sedlbauer; A. Holm; M. Krus. *Entwicklung der hygrothermischen Simulation im Bauwesen am Beispiel der Softwarefamilie WUFI®*. wksb 55, S. 7 -14, 2006.
- [55] University of Wisconsin-Madison. Solar Energy Laboratory and S. Klein. *TRNSYS, a transient system simulation program*. Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin–Madison, 1979.
- [56] J. Lebrun. *Exigences physiologiques et modalités physiques de la climatisation par source statique concentrée*. PhD thesis, Université de Liège, Frankreich, 1971.
- [57] Y. Boukhris; L. Gharbi; N. Ghrab-Morcos. *Modeling coupled heat transfer and air flow in a partitioned building with a zonal model: Application to the winter thermal comfort*. Building Simulation, Nr. 2, S. 67-74, 2009.
- [58] E. Wurtz; J. Nataf; F. Winkelmann. *Two-and three-dimensional natural and mixed convection simulation using modular zonal models in buildings*. Elsevier, International Journal of Heat and Mass Transfer 42, Nr. 5, S. 923-940, 1999.
- [59] V. Norrefeldt; G. Grün; K. Sedlbauer. *VEPZO–Velocity propagating zonal model for the estimation of the airflow pattern and temperature distribution in a confined space*. Elsevier, Building and Environment 48, S. 183-194, 2012.
- [60] V. Norrefeldt. *Velocity Propagating Zonal Model: VEPZO; a Locally Refined Airflow Model for Confined Spaces to Use in Optimization Applications*. Fraunhofer-Verlag, Stuttgart, 2013.

- [61] M. Musy; E. Wurtz; F. Winkelmann F. Allard. *Generation of a zonal model to simulate natural convection in a room with a radiative/-convective heater*. Elsevier, Building and Environment 36, Nr. 5, S. 589-596, 2001.
- [62] B. Griffith; Q. Chen. *A momentum-zonal model for predicting zone airflow and temperature distributions to enhance building load and energy simulations*. Taylor & Francis, Hvac&R Research 9, Nr. 3, S. 309-325, 2003.
- [63] F. Song; B. Zhao; X. Yang; Y. Jiang; V. Gopal; G. Dobbs; M. Sahm. *A new approach on zonal modeling of indoor environment with mechanical ventilation*. Elsevier, Building and Environment 43, Nr. 3, S. 278-286, 2008.
- [64] S. Tasca-Guernouti, S.; M. Musy; G. Hégron. *O-Zone: Automatic Generator of zonal model dedicated to dynamic simulations of air flows and heat transfers*. International IBPSA Conference, Glasgow, Schottland, 2009.
- [65] A. Kroll. *Zur regelungsorientierten Ableitung von Takagi-Sugeno-Modellen*. at-Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs-und Informationstechnik 59, Nr. 12, S. 705-720, 2011.
- [66] J. Adamy. *Nichtlineare Regelungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [67] R. Kalman. *On the general theory of control systems*. IRE Transactions on Automatic Control 4, Nr. 3, S. 110, 1959.
- [68] J. Lunze. *Regelungstechnik I -Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*, volume 39. Springer Verlag, Berlin, 2010.

- [69] D.J. Leith; W. Leithead. *Survey of gain-scheduling analysis and design*.
- [70] T. Takagi; M. Sugeno. *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*. 1985.
- [71] L. Zadeh. *Fuzzy sets*. Elsevier, Information and control 8, Nr. 3, S. 338-353, 1965.
- [72] D. Dubois. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144. Academic press, 1980.
- [73] A. Kroll. *Computational Intelligence: Eine Einführung in Probleme, Methoden und technische Anwendungen*. Oldenbourg Verlag, München, 2013.
- [74] R. Kruse; C. Borgelt; F. Klawonn; C. Moewes; G. Ruß; M. Steinbrecher. *Computational Intelligence*. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden, 2011.
- [75] M. Koch; T. Kuhn; J. Wernstedt. *Fuzzy control: optimale Nachbildung und Entwurf optimaler Entscheidungen; Mit 46 Tabellen*. Oldenbourg Verlag, München, 1996.
- [76] V. Nissen. *Ausgewählte Grundlagen der Fuzzy Set Theorie*. Ilmenauer Beiträge zur Wirtschaftsinformatik, Arbeitsbericht, Universitätsbibliothek Ilmenau, 2014.
- [77] O. Nelles. *Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer Verlag, Berlin, 2013.
- [78] H. Schulte. *Approximative Modellierung, Systemidentifikation und Reglerentwurf mittels gewichteter Kombination lokaler Zustandsraummodelle am Beispiel fluidischer Antriebe*. PhD thesis, Technische Universität Kassel, 2005.

- [79] B. Biewer. *Fuzzy-Methoden: praxisrelevante Rechenmodelle und Fuzzy-Programmiersprachen*. Springer-Verlag Berlin, 2013.
- [80] T. Johansen; R. Shorten; R. Murray-Smith. *On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Nr. 8, S. 297-313, 2000.
- [81] K. Tanaka; H. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 2004.
- [82] H. Wang; K. Tanaka; M. Griffin. *Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model*. Proceedings of 1995 IEEE Fuzzy Systems, International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium, 1995.
- [83] O. Nelles; R. Isermann. *Identification of nonlinear dynamic systems classical methods versus radial basis function networks*.
- [84] L. Wang; J. Mendel. *Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning*. IEEE Transactions on Neural Networks, Nr. 3, S. 807-814, 1992.
- [85] Z. Lendek; T. Guerra; R. Babuska; B. De Schutter. *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer Verlag, Berlin, 2011.
- [86] H. Ohtake; K. Tanaka; H. Wang. *Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept*.
- [87] J. Abonyi; R. Babuška; F. Szeifert. *Modified Gath-Geva fuzzy clustering for identification of Takagi-Sugeno fuzzy models*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics 32, Nr. 5, S. 612-621, 2005.

- [88] J. Abonyi; F. Szeifert. *Fuzzy Clustering for the Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models of MIMO Dynamical Systems*. Citeseer, n.a.
- [89] B. Hartmann; T. Ebert; T. Fischer; J. Belz; G. Kampmann; O. Nelles. *LMNTOOL–Toolbox zum automatischen Trainieren lokaler Modellnetze*. Proceedings of the 22. Workshop Computational Intelligence, Dortmund, 2012.
- [90] M. Feindt; U. Kerzel. *Prognosen bewerten: Statistische Grundlagen und praktische Tipps*. Springer-Verlag Berlin, 2014.
- [91] M. Papageorgiu. *Optimierung: statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung; mit 15 Tabellen, 147 Beispielen und 206 Übungsaufgaben*. Oldenbourg Verlag, München, 1996.
- [92] M. Gevers. *Identification for Control: From the Early Achievements to the Revival of Experiment Design*. Elsevier, European journal of control 11, Nr. 4, S. 335-352, 2005.
- [93] H. Hjalmarsson. *From experiment design to closed-loop control*. Elsevier, Automatica 41, Nr. 3, S. 393-438, 2005.
- [94] M. Zimmer. *Durchgängiger Simulationsprozess zur Effizienzsteigerung und Reifegraderhöhung von Konzeptbewertungen in der Frühen Phase der Produktentstehung*. Wissenschaftliche Reihe Fahrzeugtechnik Universität Stuttgart, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.
- [95] T. Söderström; P. Stoica. *System identification*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 1988.
- [96] R. Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme 1: Grundlegende Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [97] L. Ljung. *System identification*. Springer Verlag, Berlin, 1998.

-
- [98] O. Nelles. *LOLIMOT-Lokale, lineare Modelle zur Identifikation nicht-linearer, dynamischer Systeme*.
- [99] R. Schlittgen. *Angewandte Zeitreihenanalyse mit R*. de Gruyter, Berlin, 2015.
- [100] R. Schlittgen; B. Streitberg. *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg Verlag, München, 2001.
- [101] H. Unbehauen. *Regelungstechnik III: Identifikation, Adaption, Optimierung*. Springer-Verlag Berlin, 2013.
- [102] R. Dittmar; B. Pfeiffer. *Modellbasierte prädiktive Regelung: Eine Einführung für Ingenieure*. de Gruyter, Berlin, 2004.
- [103] U. Forssell. *Closed-loop identification: Methods, theory, and applications*. PhD thesis, Linköping University, Schweden, 1999.
- [104] U. Forssell; L. Ljung. *Closed-loop identification revisited*. Elsevier, Automatica 35, Nr. 7, S. 1215-1241, 1999.
- [105] H. Hjalmarsson; M. Gevers; F. De Bruyne. *For model-based control design, closed-loop identification gives better performance*. Elsevier, Automatica 32, Nr. 12, S. 1659-1673, 1996.
- [106] L. Ljung; U. Forssell. *An alternative motivation for the indirect approach to closed-loop identification*.
- [107] P. Van Den Hof; R. Schrama. *Identification and control-closed-loop issues*. 1995.
- [108] X. He; H. Asada. *A new method for identifying orders of input-output models for nonlinear dynamic systems*. American Control Conference, S. 2520-2523, 1993.

- [109] K. Albert; C. Dengler. *Vergleich von Ansätzen zur approximativen TS Modellierung abgetasteter nichtlinearer Systeme*. Proceedings. 24. Workshop Computational Intelligence, Dortmund, 2014.
- [110] H. Wang; K. Tanaka; M. Griffin. *An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 4, Nr. 1, S. 14-23, 1996.
- [111] M. Sadeghi; B. Safarinejadian; A. Farughian. *Parallel distributed compensator design of tank level control based on fuzzy Takagi–Sugeno model*. Elsevier, Applied Soft Computing 21, S. 280-285, 2014.
- [112] J. Lunze. *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [113] F. Cuesta; A. Ollero. *Fuzzy control of reactive navigation with stability analysis based on Conicity and Lyapunov theory*. Control Engineering Practice 12, Nr. 5, S. 625-638, 2004.
- [114] J. Van Antwerp; R. Braatz. *A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities*. Elsevier, Journal of Process Control 10, Nr. 4, S. 363-385, 2000.
- [115] S. Boyd; L. El Ghaoui; E. Feron; V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, Vol. 15, 1994.
- [116] Y. Nesterov; A. Nemirovskii; Y. Ye. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- [117] J. Löfberg. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, S. 284-289, Taipei, Taiwan, 2004.
- [118] A. Ichikawa. *Control hand book*. Ohm-sha, Tokyo, Japan, 1993.

- [119] M. Buhl; B. Lohmann. *Lyapunov-Funktionen-basiertes FührungsfILTER* Lyapunov Function based Set Point Generator. at-Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik 57, Nr. 10, S. 499-504, 2009.
- [120] K. Kefferpütz. *Regelungen für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2012.
- [121] J. Mareczek. *Invarianzregelung einer Klasse unteraktuierter Systeme*. PhD thesis, Technische Universität München, 2001.
- [122] G. Franklin; J. Powell; A. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamics systems*. Addison-Wesley, Boston, USA, 1994.
- [123] E. Kim; S. Kim. *Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy control system via LMI and ILMI: a continuous case*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10, Nr. 2, S. 391-400, 2002.
- [124] E. Kim; D. Kim. *Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy system via LMI and ILMI: discrete case*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics 31, Nr. 1, S. 132-140, 2001.
- [125] A. Schrodtt; A. Kroll. *Drift term compensating control for off-equilibrium operation of nonlinear systems with Takagi-Sugeno fuzzy models*. 2015.
- [126] F. Graybill. *Matrices with applications in statistics*. Wadsworth Inc., Belmont, USA, 1983.
- [127] J. Deutscher. *Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.

- [128] L. Evans. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics 19, 1998.
- [129] W. Vogt. *Grundlagen zur Numerik partieller Differenzialgleichungen*. Skript zur Vorlesung, Technische Universität Ilmenau, 2006.
- [130] R. Horn. *The hadamard product*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 1990.
- [131] P. Christofides. *Nonlinear and robust control of PDE systems: Methods and applications to transport-reaction processes*. Springer Science & Business Media, Wiesbaden, 2012.
- [132] Kulturstiftung des Hauses Hessen. *Webseite der Kulturstiftung*. <http://www.schloss-fasanerie.de/stiftung/ueber-die-stiftung.html>, abgerufen am 06.09.2016.
- [133] Ansys Inc. *Webseite des Unternehmens*. <http://www.ansys.com>, abgerufen am 06.09.2016.
- [134] Ansys Inc. *Ansys Fluent: 12.0 Theory Guide*. 2009.
- [135] The Mathworks. *MATLAB user manual version 7.4. 0 (R2007a)*. MathWorks Incorporation, Natick, MA, 2007.
- [136] K. Burnham. *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer, New York, 2002.
- [137] P. Andres; M. Spiwoks. *Prognosegütemaße—State of the Art der statistischen Ex-post-Beurteilung*. Sofia-Studien zur Institutionenanalyse Nr. 00-1, Darmstadt, 2000.
- [138] W. Stahel. *Lineare Regression*. Skript des Nachdiplomkurses Statistik der ETH Zürich, 2004.

- [139] K. Kefferpütz; J. Adamy. *A tracking controller for linear systems subject to input amplitude and rate constraints*. Proc. of the American Control Conference, 2011.

